

Robotik I: Einführung in die Robotik

Übung 1: Mathematische Grundlagen (Rest)

Übung 2: Kinematik

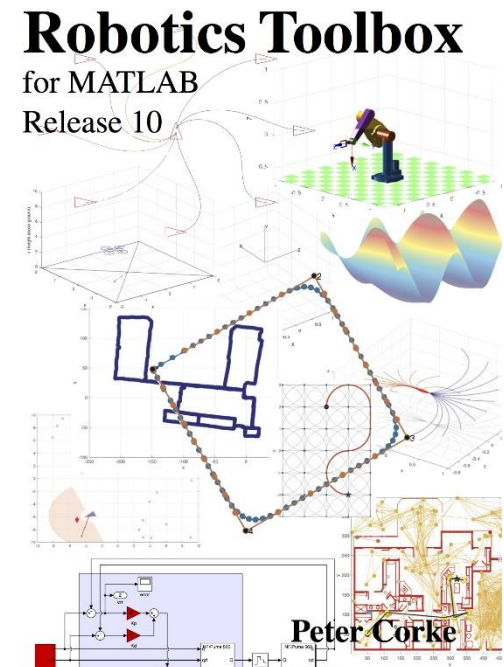
Fabian Paus, Tamim Asfour

Institut für Anthropomatik und Robotik

KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)
Hochperformante Humanoide Technologien (H²T)



- Installationsanleitung für Studierende am KIT
 - <https://www.scc.kit.edu/produkte/3841.php>
- Robotics Toolbox (Peter Corke)
 - http://petercorke.com/wordpress/toolboxes/robotics-toolbox#Downloading_the_Toolbox
 - Die .mltbx Datei herunterladen
 - Aus dem Matlab-Fileexplorer öffnen
- Selber ausprobieren: Übungsblatt 1 in Matlab lösen



Robotik I: Einführung in die Robotik

Übung 1: Mathematische Grundlagen (Rest)

Fabian Paus, Tamim Asfour

Institut für Anthropomatik und Robotik

KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)
Hochperformante Humanoide Technologien (H²T)



Aufgabe 5: Quaternionen

Gegeben seien der Punkt $\mathbf{p} = (5, 1, 7)^T$, der Vektor $\mathbf{a} = (0, 0, 1)^T$ und der Winkel $\Phi = 90^\circ$.

1. Stellen Sie $\mathbf{p}$ als Quaternion $\mathbf{v}$ dar.
2. Bestimmen Sie das Rotationsquaternion $\mathbf{q}$, das eine Rotation mit dem Winkel Φ um die Achse $\mathbf{a}$ beschreibt, sowie das zu $\mathbf{q}$ konjugierte Quaternion $\mathbf{q}^*$.
3. Transformieren Sie den Punkt $\mathbf{p}$ mit $\mathbf{q}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\mathbf{p}'$.
4. Gegeben seien die beiden Rotationsquaternionen $\mathbf{q}_1 = (\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2})$ und $\mathbf{q}_2 = (\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_2 \cdot \sin \frac{\pi}{2})$ mit $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)^T$ und $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)^T$.

Stellen Sie die direkte Formulierung der SLERP Interpolation zwischen $\mathbf{q}_1$ und $\mathbf{q}_2$ in Abhängigkeit des Parameters $t \in [0, 1]$ auf und geben Sie das Interpolationsergebnis für $t = \frac{1}{2}$ an.

Aufgabe 5.1

■ Stellen Sie $\mathbf{p} = (5, 1, 7)^T$ als Quaternion $\mathbf{v}$ dar.

$\mathbf{v} =$

Aufgabe 5.1

■ Stellen Sie $\mathbf{p} = (5, 1, 7)^T$ als Quaternion $\mathbf{v}$ dar.

$$\mathbf{v} = (0, \mathbf{p})$$

$$= (0, 5, 1, 7)$$

Aufgabe 5.2

- Bestimmen Sie das Rotationsquaternion $\mathbf{q}$, das eine Rotation mit dem Winkel $\Phi = 90^\circ$ um die Achse $\mathbf{a} = (0, 0, 1)^T$ beschreibt, sowie das zu $\mathbf{q}$ konjugierte Quaternion $\mathbf{q}^*$.

$\mathbf{q} =$

Aufgabe 5.2

- Bestimmen Sie das Rotationsquaternion $\mathbf{q}$, das eine Rotation mit dem Winkel $\Phi = 90^\circ$ um die Achse $\mathbf{a} = (0, 0, 1)^T$ beschreibt, sowie das zu $\mathbf{q}$ konjugierte Quaternion $\mathbf{q}^*$.

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \left(\cos \frac{\Phi}{2}, \mathbf{a} \cdot \sin \frac{\Phi}{2} \right) \\ &= (\cos 45^\circ, 0, 0, \sin 45^\circ) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Aufgabe 5.2

- Bestimmen Sie das Rotationsquaternion $\mathbf{q}$, das eine Rotation mit dem Winkel $\Phi = 90^\circ$ um die Achse $\mathbf{a} = (0, 0, 1)^T$ beschreibt, sowie das zu $\mathbf{q}$ konjugierte Quaternion $\mathbf{q}^*$.

$$\mathbf{q} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\mathbf{q}^* =$$

Aufgabe 5.2

- Bestimmen Sie das Rotationsquaternion $\mathbf{q}$, das eine Rotation mit dem Winkel $\Phi = 90^\circ$ um die Achse $\mathbf{a} = (0, 0, 1)^T$ beschreibt, sowie das zu $\mathbf{q}$ konjugierte Quaternion $\mathbf{q}^*$.

$$\mathbf{q} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^* &= (s, -\mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} - k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3

- Transformieren Sie den Punkt $\mathbf{p} = (5, 1, 7)^T$ mit $\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\mathbf{p}'$.

$\mathbf{v}' =$

Aufgabe 5.3

- Transformieren Sie den Punkt $\mathbf{p} = (5, 1, 7)^T$ mit $\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\mathbf{p}'$.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}^* \qquad \mathbf{v} = (0, 5, 1, 7)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot (5i + 1j + 7k) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (5i + 1j + 7k + 5ki + 1kj + 7k^2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (5i + 1j + 7k + 5j + 1(-i) + 7(-1)) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Aufgabe 5.3

- Transformieren Sie den Punkt $\mathbf{p} = (5, 1, 7)^T$ mit $\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\mathbf{p}'$.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}^*$$

$$\mathbf{v} = (0, 5, 1, 7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-7 + 4i + 6j + 7k) \cdot (1 - k)$$

Aufgabe 5.3

- Transformieren Sie den Punkt $\mathbf{p} = (5, 1, 7)^T$ mit $\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\mathbf{p}'$.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}^* \qquad \mathbf{v} = (0, 5, 1, 7)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-7 + 4i + 6j + 7k) \cdot (1 - k)$$

$$= \frac{1}{2} (-7 + 4i + 6j + 7k + 7k - 4ik - 6jk - 7k^2)$$

$$= \frac{1}{2} (-7 + 4i + 6j + 7k + 7k - 4(-j) - 6(i) - 7(-1))$$

Aufgabe 5.3

- Transformieren Sie den Punkt $\mathbf{p} = (5, 1, 7)^T$ mit $\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\mathbf{p}'$.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}^*$$

$$\mathbf{v} = (0, 5, 1, 7)$$

$$= \frac{1}{2} (0 - 2i + 10j + 14k)$$

Aufgabe 5.3

- Transformieren Sie den Punkt $\mathbf{p} = (5, 1, 7)^T$ mit $\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} + k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ und bestimmen Sie das Ergebnis $\mathbf{p}'$.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}^*$$

$$\mathbf{v} = (0, 5, 1, 7)$$

$$= \frac{1}{2}(0 - 2i + 10j + 14k)$$

$$= 0 - i + 5j + 7k = (0, -1, 5, 7)$$

$$\mathbf{v}' = (0, \mathbf{p}')$$

$$\Rightarrow \mathbf{p}' = (-1, 5, 7)$$

Aufgabe 5.4

■ Gegeben:

$$\mathbf{q}_1 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)^T$$

$$\mathbf{q}_2 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)^T$$

$$\text{Slerp}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, t) = ?$$

Aufgabe 5.4

■ Gegeben:

$$\mathbf{q}_1 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)^T$$

$$\mathbf{q}_2 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)^T$$

$$\text{Slerp}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, t) = ?$$

Winkel θ zwischen $\mathbf{q}_1$ und $\mathbf{q}_2$:

Aufgabe 5.4

■ Gegeben:

$$\mathbf{q}_1 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)^T$$

$$\mathbf{q}_2 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)^T$$

Slerp($\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, t$) = ?

Winkel θ zwischen $\mathbf{q}_1$ und $\mathbf{q}_2$:

$$\cos \theta = \langle \mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 5.4

■ Gegeben:

$$\mathbf{q}_1 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)^T$$

$$\mathbf{q}_2 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)^T$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Slerp}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, t) =$$

Aufgabe 5.4

■ Gegeben:

$$\mathbf{q}_1 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)^T$$

$$\mathbf{q}_2 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)^T$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Slerp}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, t) = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin \theta} \cdot \mathbf{q}_1 + \frac{\sin t\theta}{\sin \theta} \cdot \mathbf{q}_2$$

$$= \sin \left((1-t) \frac{\pi}{2} \right) \cdot \mathbf{q}_1 + \sin \left(t \frac{\pi}{2} \right) \cdot \mathbf{q}_2 \quad // \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Aufgabe 5.4

■ Gegeben:

$$\mathbf{q}_1 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)^T$$

$$\mathbf{q}_2 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)^T$$

$$t = 0.5$$

$$\text{Slerp}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, 0.5) = ?$$

Aufgabe 5.4

■ Gegeben:

$$\mathbf{q}_1 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)^T$$

$$\mathbf{q}_2 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \mathbf{a}_2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \text{ mit } \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)^T$$

$$t = 0.5$$

$$\text{Slerp}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, 0.5) = \sin \left((1 - t) \frac{\pi}{2} \right) \cdot \mathbf{q}_1 + \sin \left(t \frac{\pi}{2} \right) \cdot \mathbf{q}_2$$

$$= \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot \mathbf{q}_1 + \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot \mathbf{q}_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{q}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{q}_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot j$$

Aufgabe 6: Quaternionen

Zeigen Sie dass der Raum der Einheitsquaternionen eine Untergruppe der Quaternionen $\mathbb{H}$ ist.

Hinweis: G ist genau dann eine Gruppe $(G, \cdot)$ wenn gilt:

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$
2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Neutrales Element: $\exists e \in G : \forall a \in G : e \cdot a = a \cdot e = a$
4. Inverses Element: $\forall a \in G : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = e$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit (Tricky)

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in S^3$$

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\|^2 =$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit (Tricky)

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in S^3$$

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^*$$

$$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{a}^*) \quad // \text{ Involutiver Antiautomorphismus}$$

$$= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^*) \cdot \mathbf{a}^* \quad // \text{ Assoziativität}$$

$$= \mathbf{a} \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \mathbf{a}^* = \mathbf{a} \cdot 1 \cdot \mathbf{a}^* = \|\mathbf{a}\| = 1$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in S^3$$

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\|^2 =$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in S^3$$

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot : \forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in S^3$$

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= a_3^2 b_3^2 + a_2^2 b_3^2 + a_1^2 b_3^2 + a_0^2 b_3^2 \\
&+ a_3^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_0^2 b_2^2 \\
&+ a_3^2 b_1^2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_1^2 + a_0^2 b_1^2 \\
&+ a_3^2 b_0^2 + a_2^2 b_0^2 + a_1^2 b_0^2 + a_0^2 b_0^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in S^3$$

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= a_3^2 b_3^2 + a_2^2 b_3^2 + a_1^2 b_3^2 + a_0^2 b_3^2 \\
&+ a_3^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_0^2 b_2^2 \\
&+ a_3^2 b_1^2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_1^2 + a_0^2 b_1^2 \\
&+ a_3^2 b_0^2 + a_2^2 b_0^2 + a_1^2 b_0^2 + a_0^2 b_0^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in S^3$$

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$\begin{aligned} &= b_3^2 \cdot (a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_0^2) \\ &+ b_2^2 \cdot (a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_0^2) \\ &+ b_1^2 \cdot (a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_0^2) \\ &+ b_0^2 \cdot (a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_0^2) \end{aligned}$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in S^3$$

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$= b_3^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_2^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_1^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_0^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in S^3$$

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$= b_3^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_2^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_1^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_0^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2$$

$$= (b_3^2 + b_2^2 + b_1^2 + b_0^2) \cdot \|\mathbf{a}\|^2$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in S^3$$

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$= b_3^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_2^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_1^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_0^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2$$

$$= (b_3^2 + b_2^2 + b_1^2 + b_0^2) \cdot \|\mathbf{a}\|^2$$

$$= \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in S^3$$

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$= b_3^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_2^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_1^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_0^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2$$

$$= (b_3^2 + b_2^2 + b_1^2 + b_0^2) \cdot \|\mathbf{a}\|^2$$

$$= \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in S^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in S^3$$

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\|^2 = \|(a_0, a_1, a_2, a_3) \cdot (b_0, b_1, b_2, b_3)\|^2$$

$$= b_3^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_2^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_1^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 + b_0^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2$$

$$= (b_3^2 + b_2^2 + b_1^2 + b_0^2) \cdot \|\mathbf{a}\|^2$$

$$= \|\mathbf{b}\|^2 \cdot \|\mathbf{a}\|^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

q. e. d.

Aufgabe 6.2 & 6.3: Assoziativität und Neutrales Element

2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

3. Neutrales Element: $\exists e \in G : \forall a \in G : e \cdot a = a \cdot e = a$

Aufgabe 6.2 & 6.3: Assoziativität und Neutrales Element

2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Eineheitsquaternionen sind Untermenge der Quaternionen.
Multiplikation von Quaternionen ist assoziativ.

3. Neutrales Element: $\exists e \in G : \forall a \in G : e \cdot a = a \cdot e = a$

Das neutrale Element ist $e = (1, 0, 0, 0)$.

Aufgabe 6.4: Inverses Element

4. Inverses Element: $\forall a \in G : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = e$

$$\mathbf{q} \in S^3 \Rightarrow \mathbf{q}^{-1} \in S^3$$

Aufgabe 6.4: Inverses Element

4. Inverses Element: $\forall a \in G : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = e$

$$\mathbf{q} \in S^3 \Rightarrow \mathbf{q}^{-1} \in S^3$$

$$\|\mathbf{q}^{-1}\|^2 = \left\| \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|} \right\|^2$$

$$= \left\| \frac{\mathbf{q}^*}{1} \right\|^2$$

$$= 1$$

Aufgabe 6.1: Abgeschlossenheit

1. Abgeschlossen bzgl. $\cdot$: $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$ ☒
2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ☒
3. Neutrales Element: $\exists e \in G : \forall a \in G : e \cdot a = a \cdot e = a$ ☒
4. Inverses Element: $\forall a \in G : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = e$ ☒

Robotik I: Einführung in die Robotik

Übung 2: Kinematik

Fabian Paus, Tamim Asfour

Institut für Anthropomatik und Robotik

KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)
Hochperformante Humanoide Technologien (H²T)



Aufgabe 1: DH-Transformation

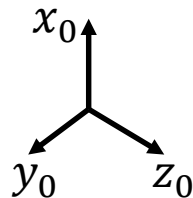
■ Gegeben:

Rechtshändiges Koordinatensystem

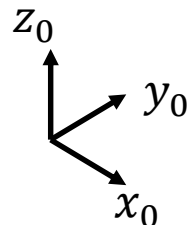
■ Gesucht:

Transformiertes Koordinatensystem nach Anwendung der DH-Parameter

1. DH-Parameter: $\theta_1 = 0^\circ$, $d_1 = 60 \text{ mm}$, $a_1 = 0 \text{ mm}$, $\alpha_1 = 180^\circ$



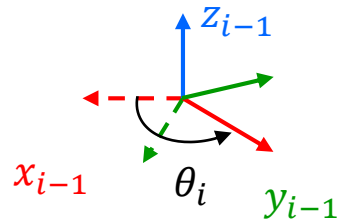
2. DH-Parameter: $\theta_1 = 90^\circ$, $d_1 = -30 \text{ mm}$, $a_1 = 60 \text{ mm}$, $\alpha_1 = -90^\circ$



DH-Transformationsmatrizen

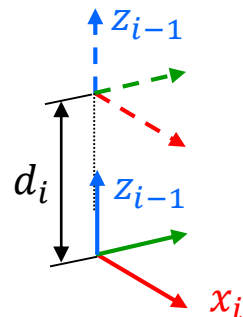
Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

1. Eine **Rotation** θ_i um die z_{i-1} -Achse, damit die x_{i-1} -Achse parallel zur x_i -Achse liegt.



$$R_{z_{i-1}}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Eine **Translation** d_i entlang der z_{i-1} -Achse zu dem Punkt, wo sich z_{i-1} und x_i schneiden.



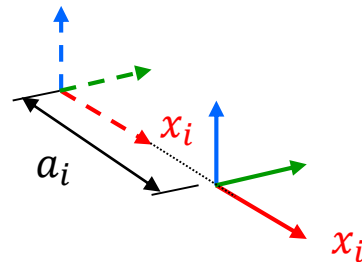
$$T_{z_{i-1}}(d_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DH-Transformationsmatrizen II

Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

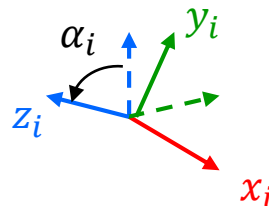
3. Eine **Translation** a_i entlang der x_i -Achse, um die Ursprünge der Koordinatensysteme in Deckung zu bringen.

$$T_{x_i}(a_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



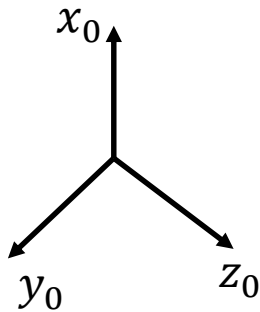
4. Eine **Rotation** α_i um die x_i -Achse, um die z_{i-1} -Achse in die z_i -Achse zu überführen.

$$R_{x_i}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



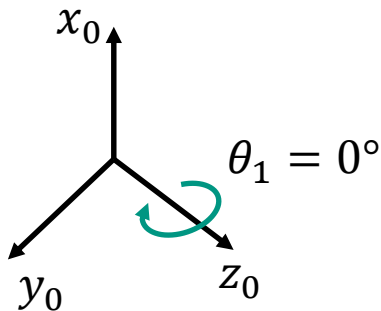
Aufgabe 1.1: DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 0^\circ$, $d_1 = 60 \text{ mm}$, $a_1 = 0 \text{ mm}$, $\alpha_1 = 180^\circ$



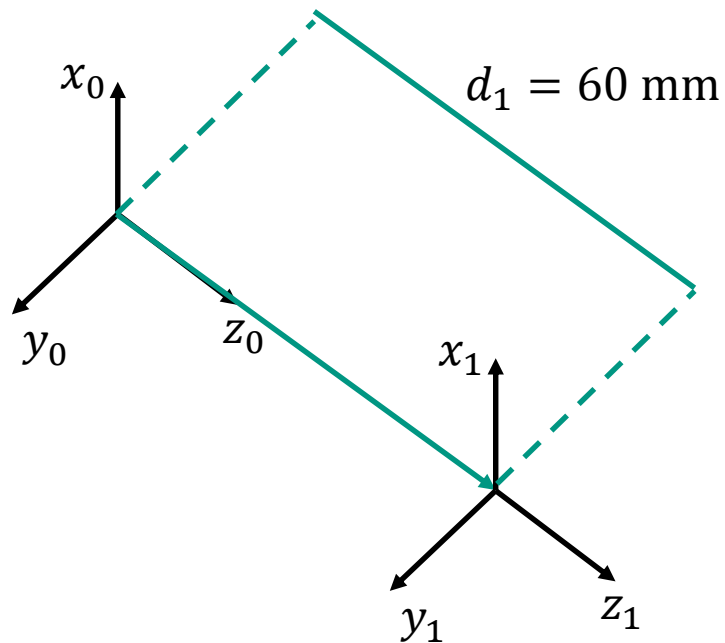
Aufgabe 1.1: DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 0^\circ$, $d_1 = 60 \text{ mm}$, $a_1 = 0 \text{ mm}$, $\alpha_1 = 180^\circ$
Rotation um z_0 -Achse mit $\theta_1 = 0^\circ$:



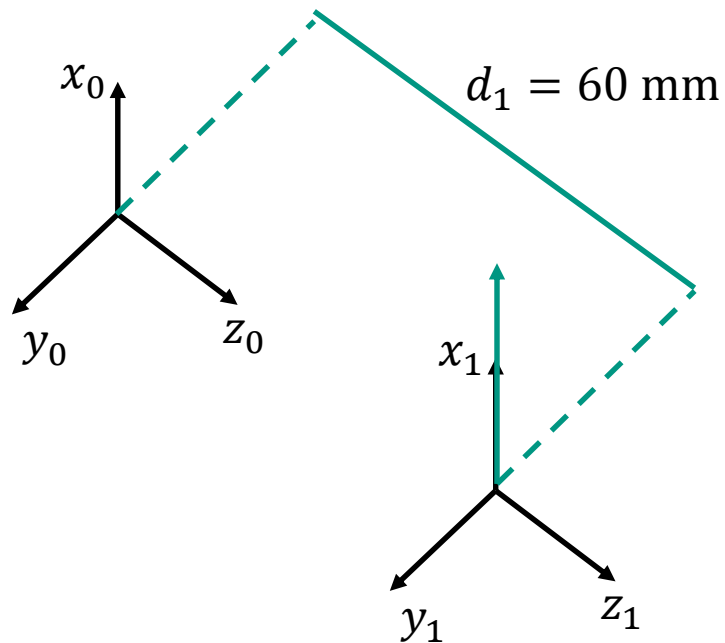
Aufgabe 1.1: DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 0^\circ$, $d_1 = 60 \text{ mm}$, $a_1 = 0 \text{ mm}$, $\alpha_1 = 180^\circ$
Translation entlang z_0 -Achse mit $d_1 = 60 \text{ mm}$:



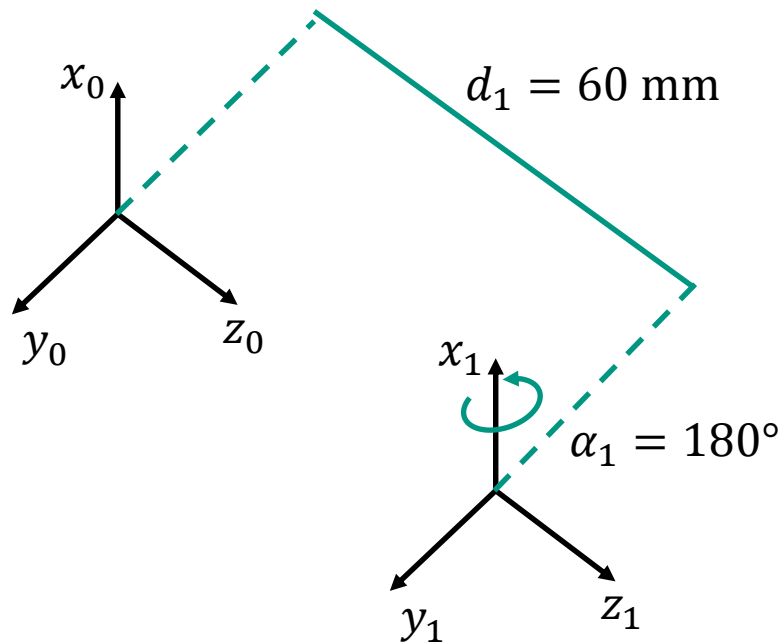
Aufgabe 1.1: DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 0^\circ$, $d_1 = 60 \text{ mm}$, $a_1 = 0 \text{ mm}$, $\alpha_1 = 180^\circ$
Translation entlang x_1 -Achse mit $a_1 = 0 \text{ mm}$:



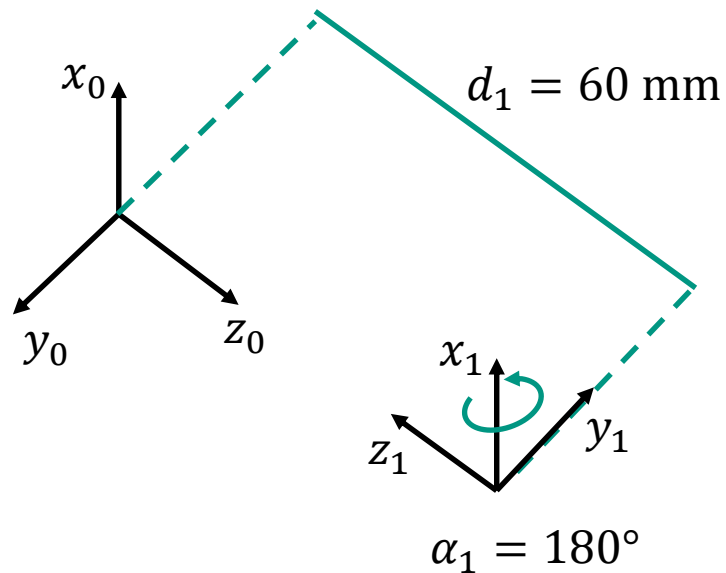
Aufgabe 1.1: DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 0^\circ$, $d_1 = 60 \text{ mm}$, $a_1 = 0 \text{ mm}$, $\alpha_1 = 180^\circ$
Rotation um x_1 -Achse mit $\alpha_1 = 180^\circ$:



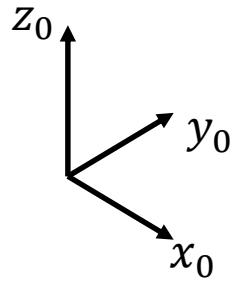
Aufgabe 1.1: DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 0^\circ$, $d_1 = 60 \text{ mm}$, $a_1 = 0 \text{ mm}$, $\alpha_1 = 180^\circ$
Rotation um x_1 -Achse mit $\alpha_1 = 180^\circ$:



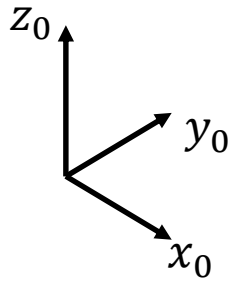
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90^\circ$, $d_1 = -30$ mm, $a_1 = 60$ mm, $\alpha_1 = -90^\circ$



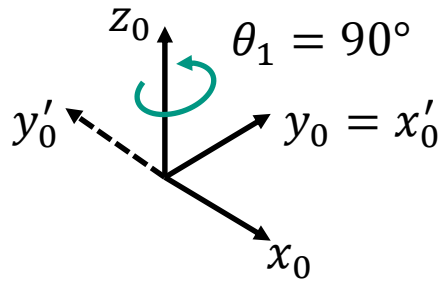
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90^\circ$, $d_1 = -30$ mm, $a_1 = 60$ mm, $\alpha_1 = -90^\circ$
Rotation um z_0 -Achse mit $\theta_1 = 90^\circ$:



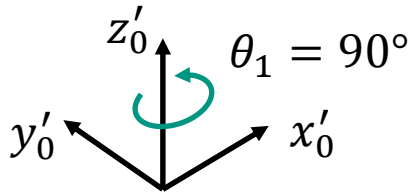
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90^\circ$, $d_1 = -30$ mm, $a_1 = 60$ mm, $\alpha_1 = -90^\circ$
Rotation um z_0 -Achse mit $\theta_1 = 90^\circ$:



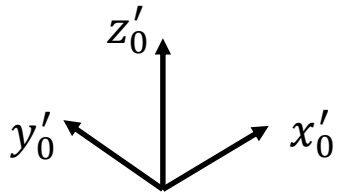
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90^\circ$, $d_1 = -30$ mm, $a_1 = 60$ mm, $\alpha_1 = -90^\circ$
Rotation um z_0 -Achse mit $\theta_1 = 90^\circ$:



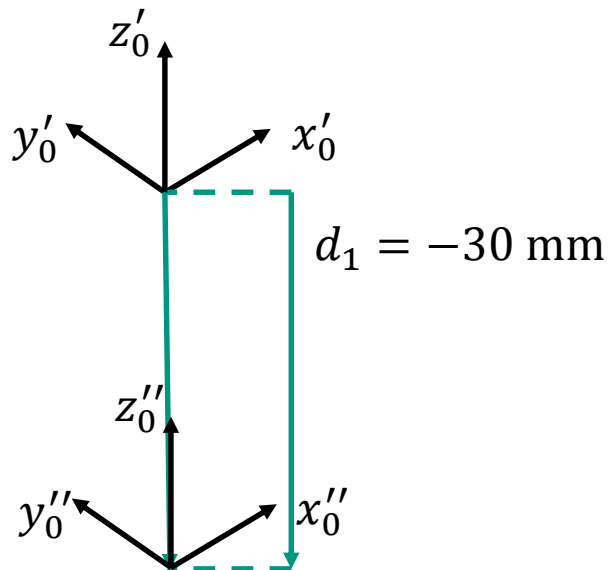
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90^\circ$, $d_1 = -30 \text{ mm}$, $a_1 = 60 \text{ mm}$, $\alpha_1 = -90^\circ$
Translation entlang z_0 -Achse mit $d_1 = -30 \text{ mm}$:



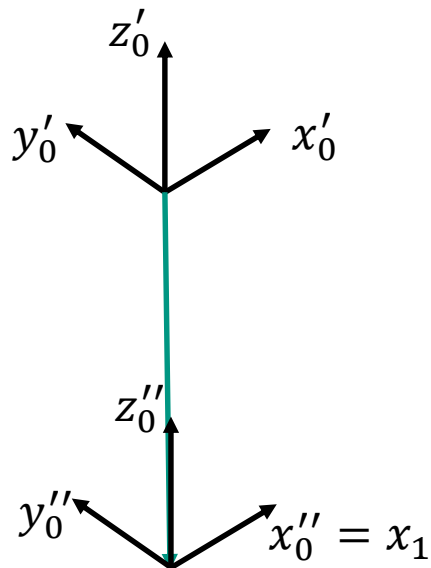
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90^\circ$, $d_1 = -30 \text{ mm}$, $a_1 = 60 \text{ mm}$, $\alpha_1 = -90^\circ$
Translation entlang z_0 -Achse mit $d_1 = -30 \text{ mm}$:



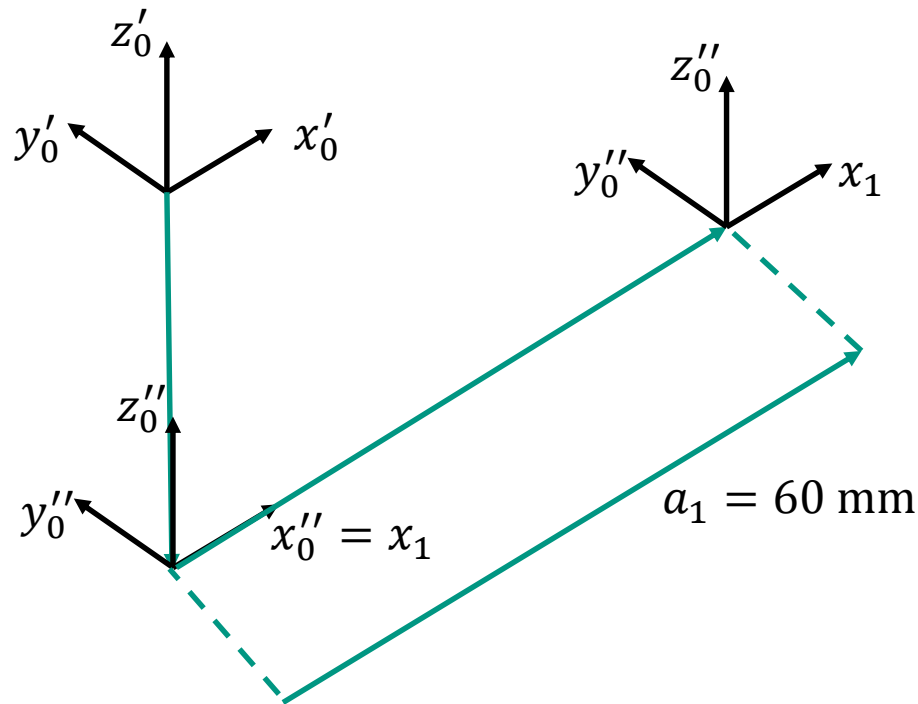
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90^\circ$, $d_1 = -30 \text{ mm}$, $a_1 = 60 \text{ mm}$, $\alpha_1 = -90^\circ$
Translation entlang x_1 -Achse mit $a_1 = 60 \text{ mm}$:



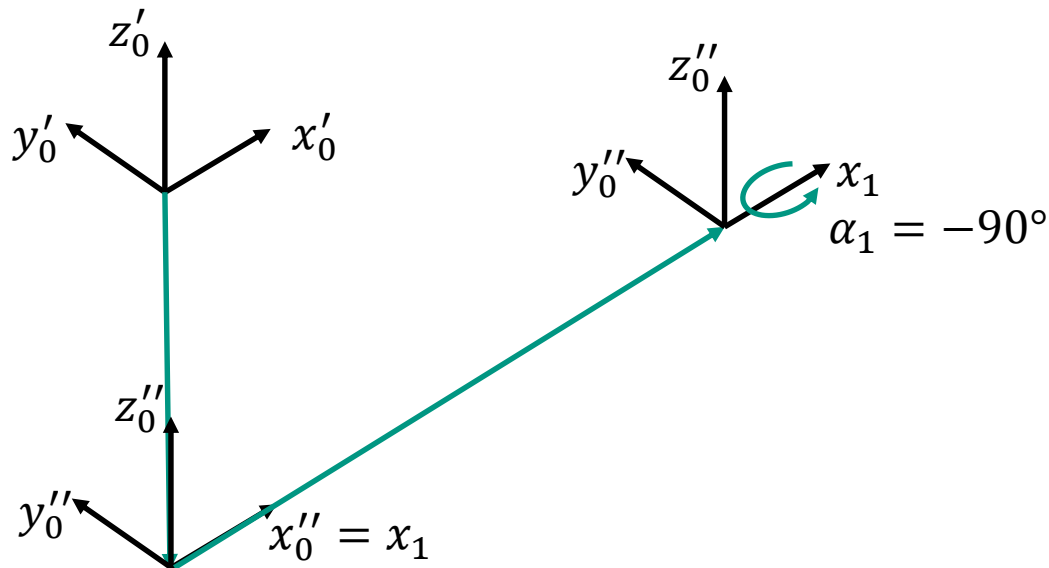
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90^\circ$, $d_1 = -30 \text{ mm}$, $a_1 = 60 \text{ mm}$, $\alpha_1 = -90^\circ$
Translation entlang x_1 -Achse mit $a_1 = 60 \text{ mm}$:



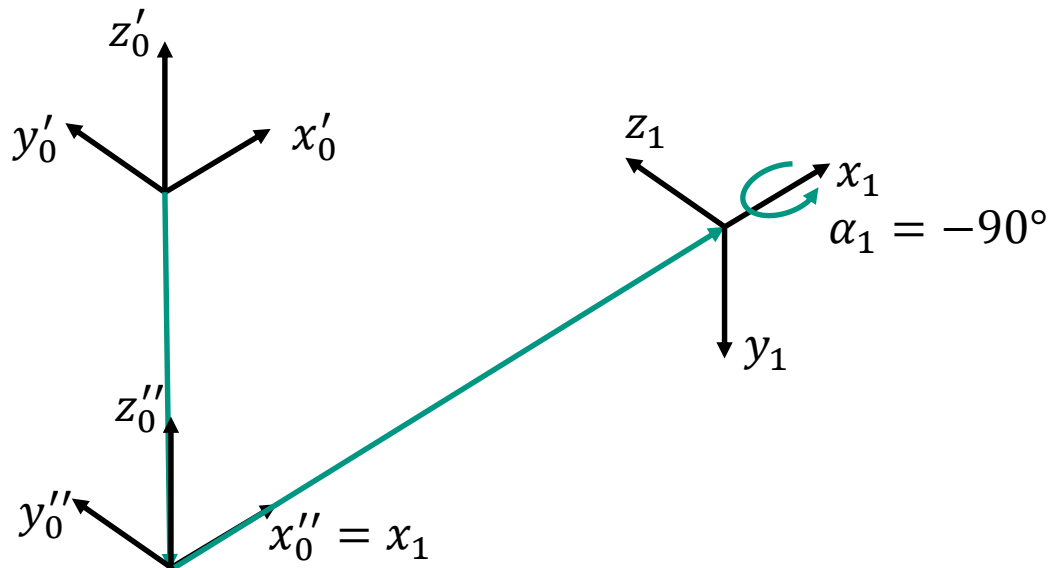
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90^\circ$, $d_1 = -30 \text{ mm}$, $a_1 = 60 \text{ mm}$, $\alpha_1 = -90^\circ$
Rotation um x_1 -Achse mit $\alpha_1 = -90^\circ$:



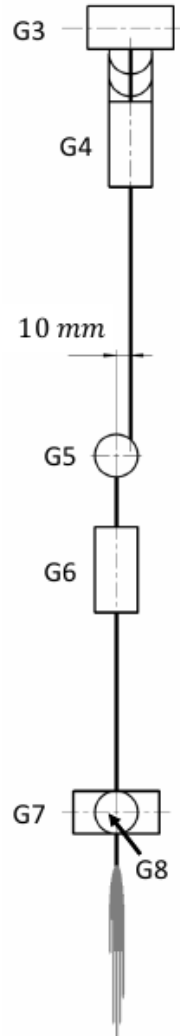
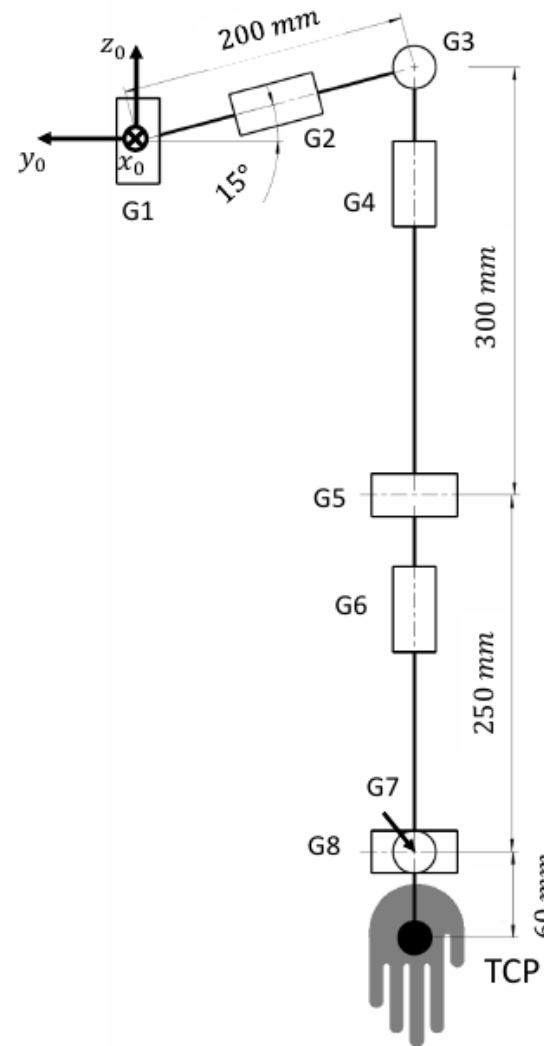
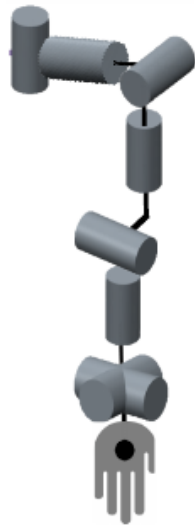
Aufgabe 1.2 : DH-Transformation

- DH-Parameter: $\theta_1 = 90^\circ$, $d_1 = -30 \text{ mm}$, $a_1 = 60 \text{ mm}$, $\alpha_1 = -90^\circ$
Rotation um x_1 -Achse mit $\alpha_1 = -90^\circ$:



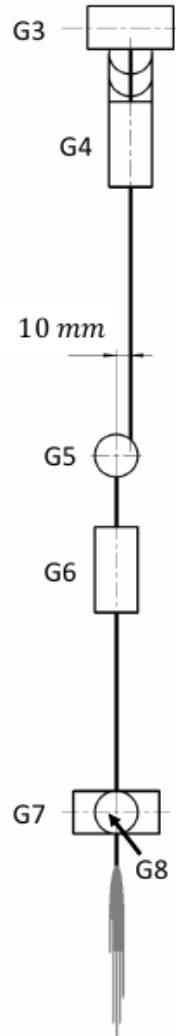
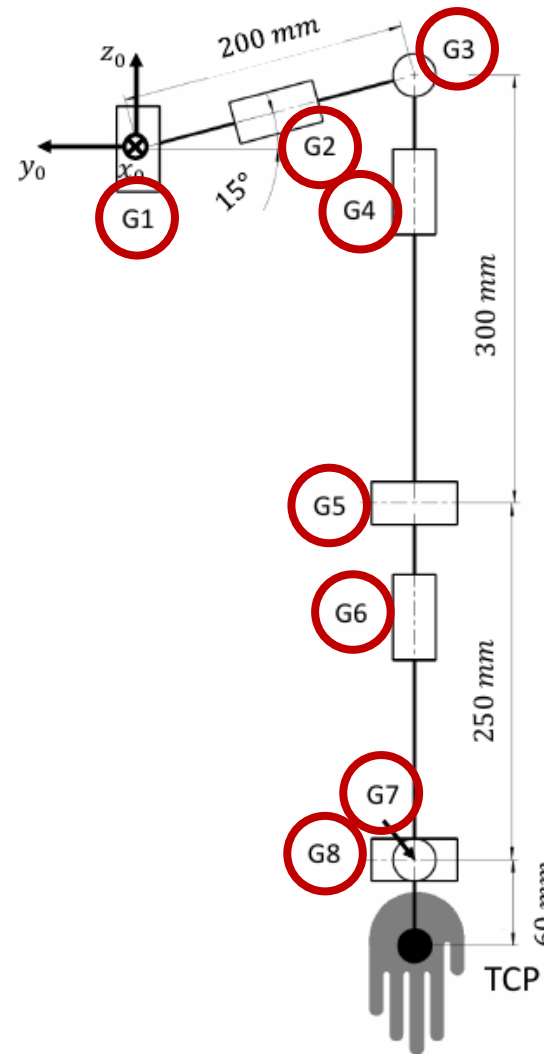
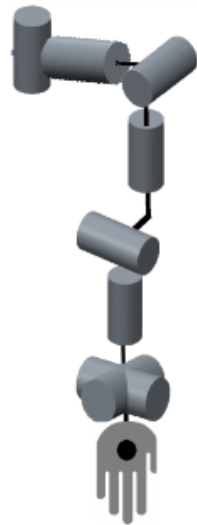
Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

- **Gegeben:**
Schematische Darstellung der linken Armkinematik von ARMAR-4
- **Gesucht:**
DH-Parameter der Gelenke G1-G8 ausgehend vom Basiskoordinatensystem BKS



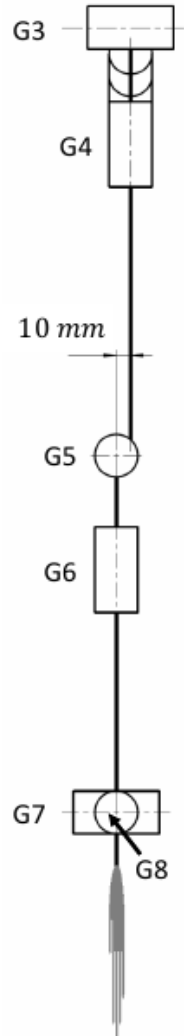
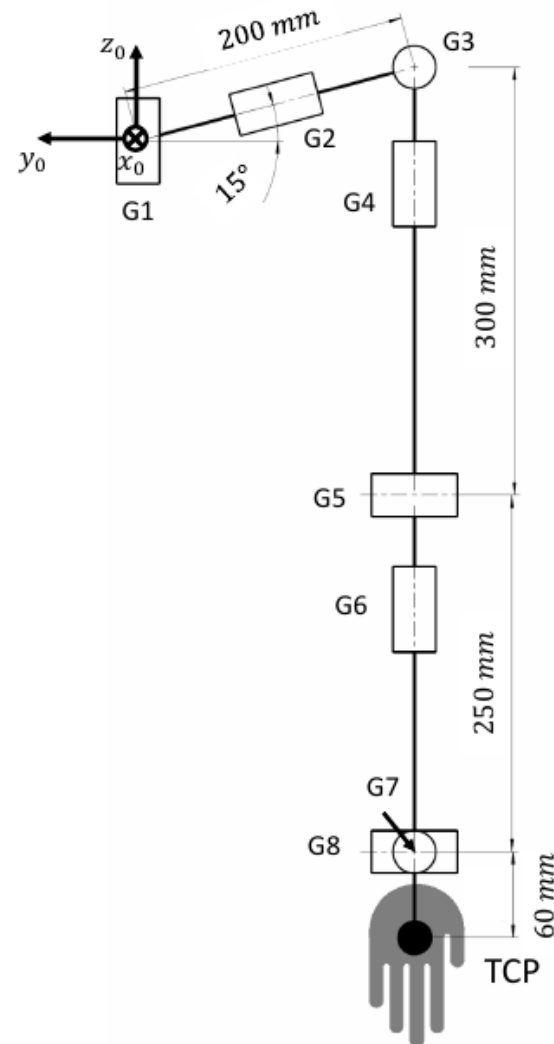
Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

- **Gegeben:**
Schematische Darstellung der linken Armkinematik von ARMAR-4
- **Gesucht:**
DH-Parameter der Gelenke **G1-G8** ausgehend vom Basiskoordinatensystem BKS



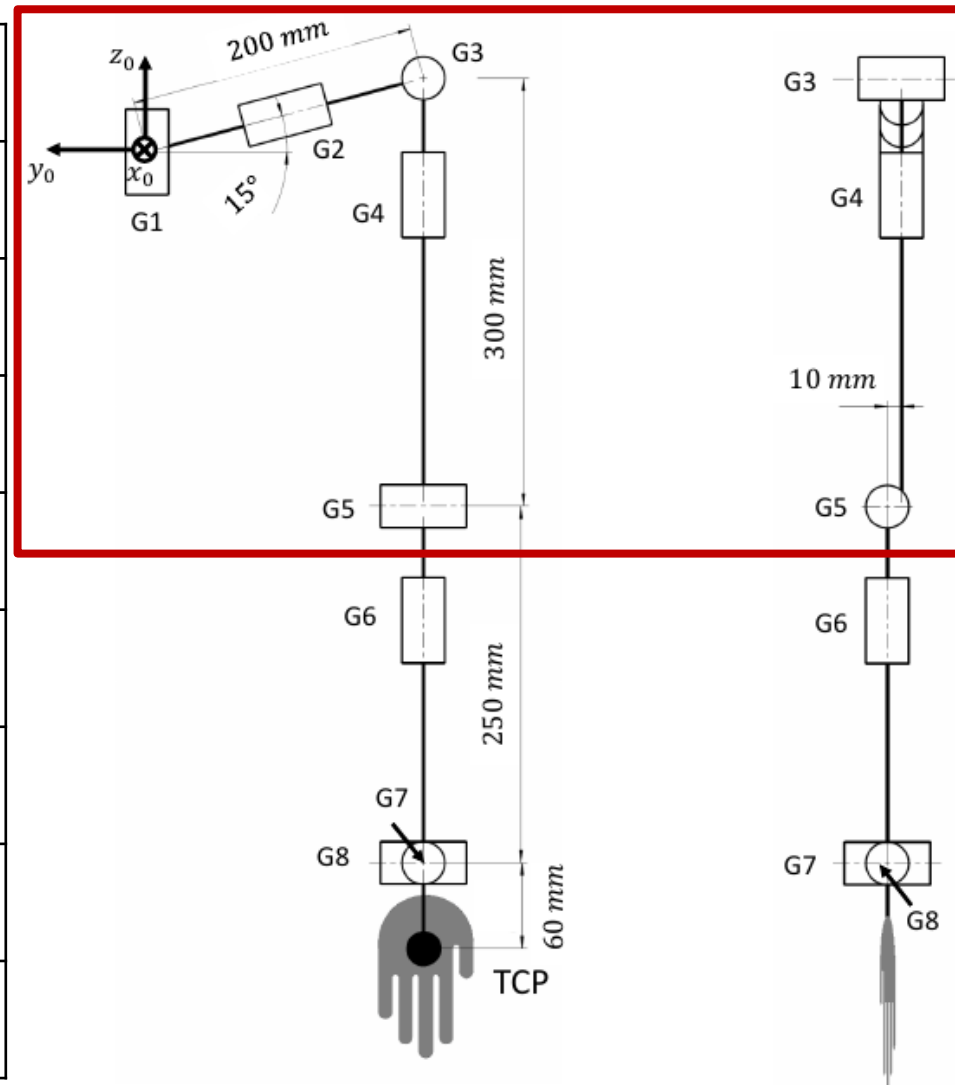
Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	$\theta [^\circ]$	$d [mm]$	$a [mm]$	$\alpha [^\circ]$
G1				
G2				
G3				
G4				
G5				
G6				
G7				
G8				



Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

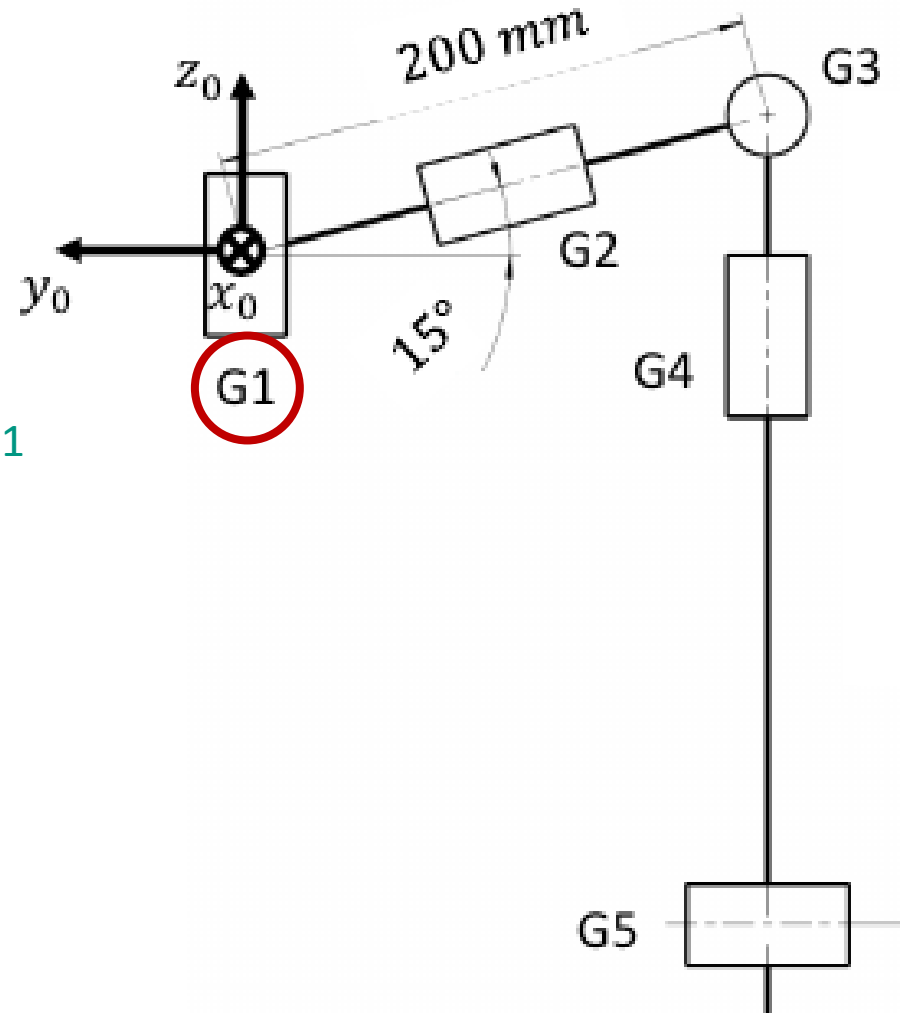
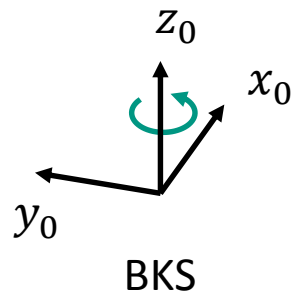
	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G1				
G2				
G3				
G4				
G5				
G6				
G7				
G8				



Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	$\theta [^\circ]$	$d [mm]$	$a [mm]$	$\alpha [^\circ]$
G1	θ_1			

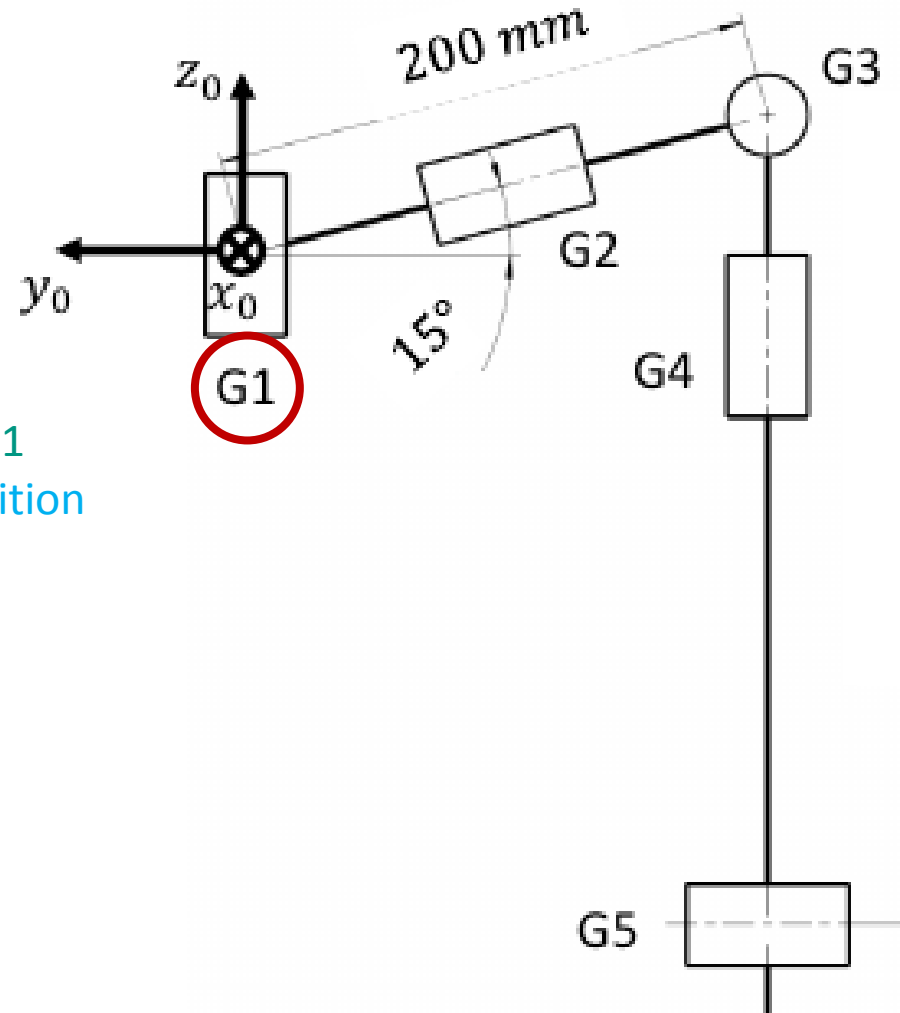
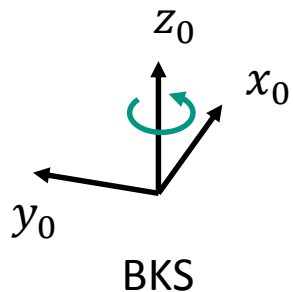
- z_0 -Achse des BKS ist Rotationsachse von G1



Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G1	θ_1	0	0	

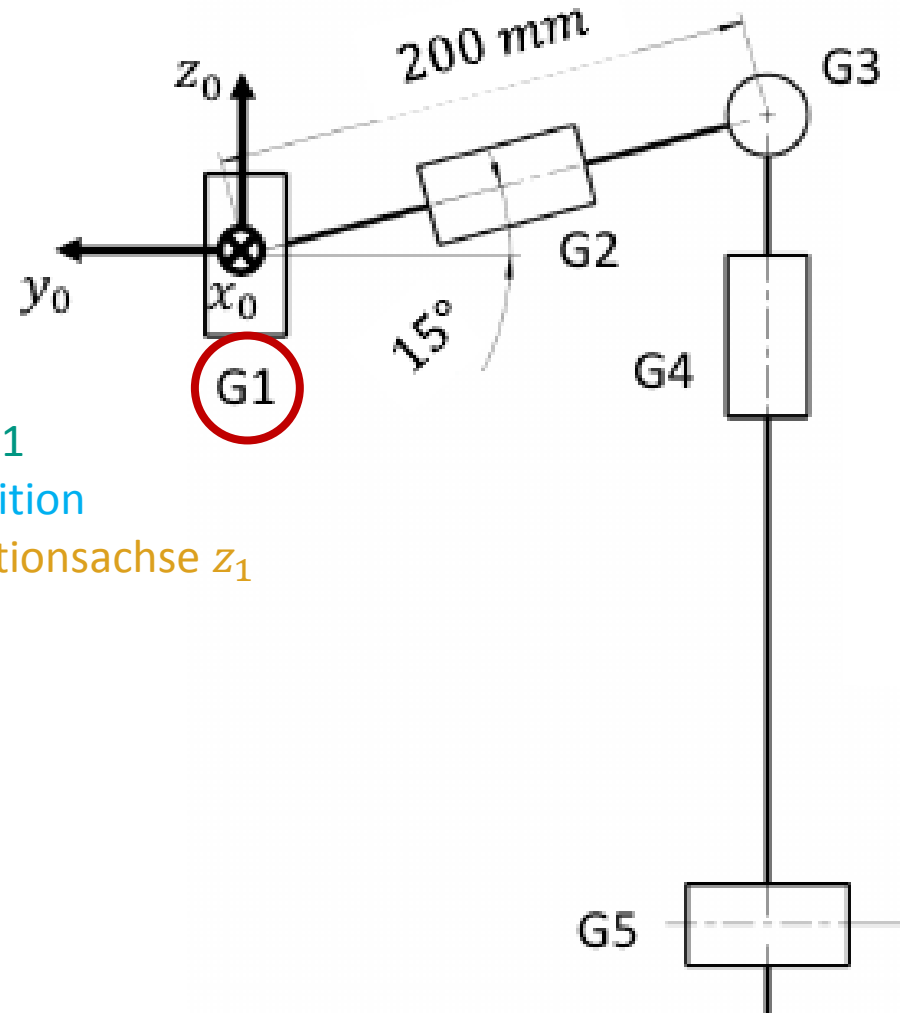
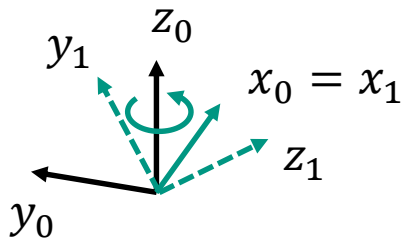
- z_0 -Achse des BKS ist Rotationsachse von G1
- G1 und G2 befinden sich an derselben Position



Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G1	θ_1	0	0	75

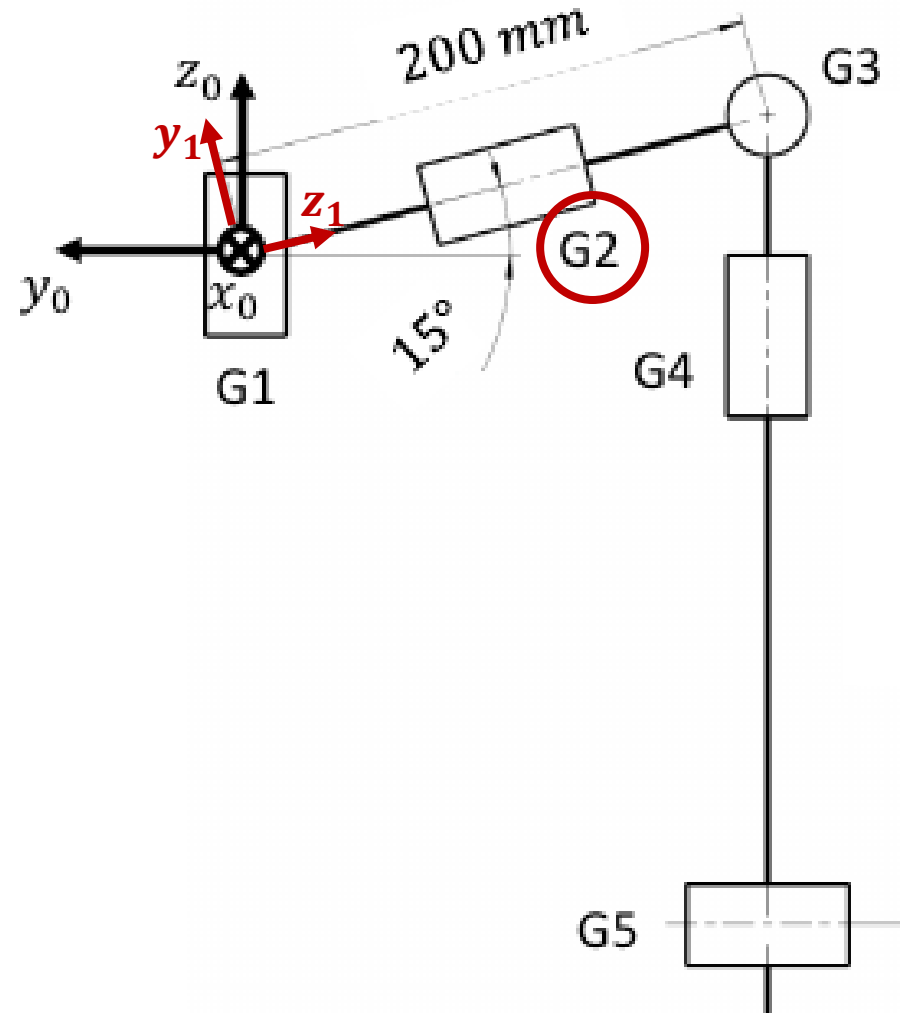
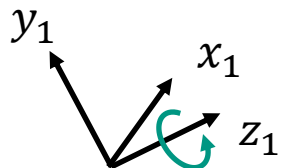
- z_0 -Achse des BKS ist Rotationsachse von G1
- G1 und G2 befinden sich an derselben Position
- Rotation um x_0 -Achse ergibt nächste Rotationsachse z_1
 $\alpha = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$



Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G2	θ_2			

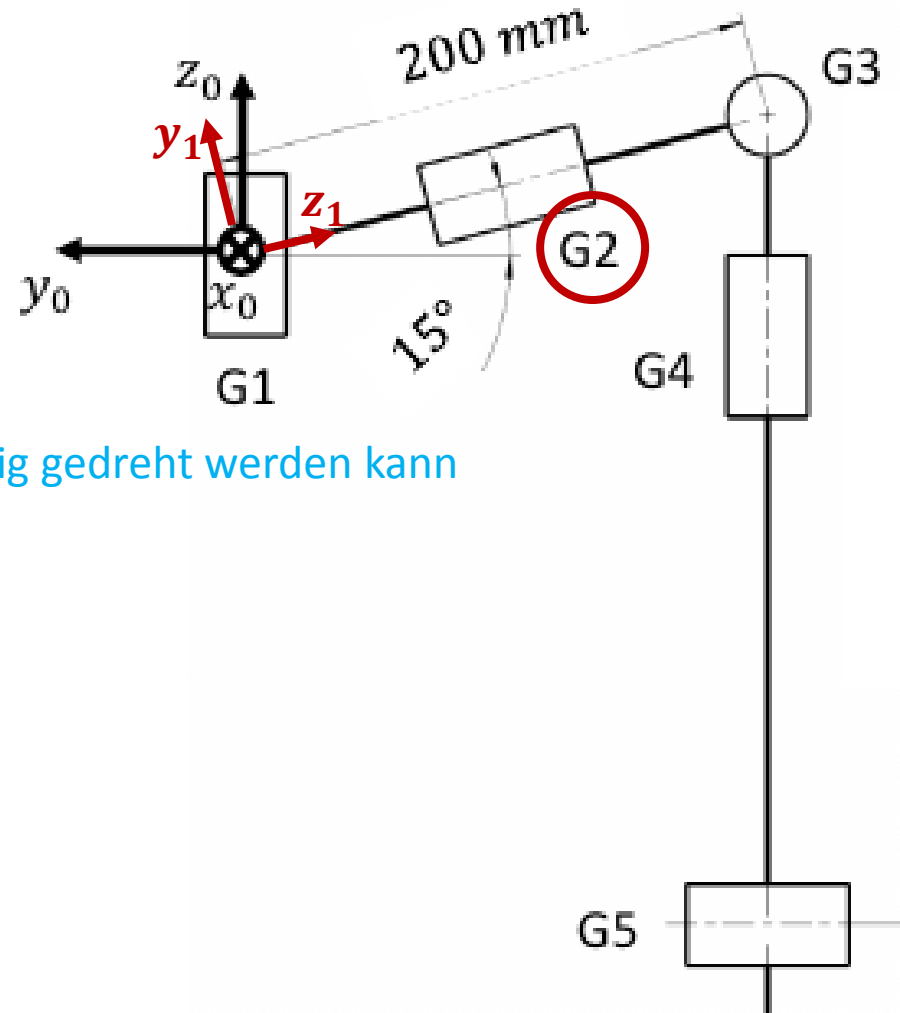
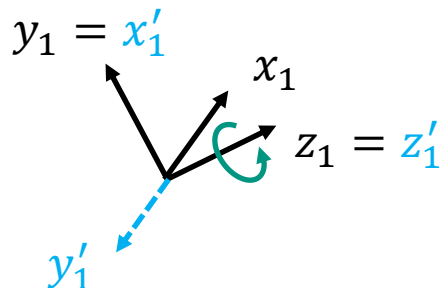
- z_1 -Achse ist Rotationsachse von G2



Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G2	$\theta_2 + 90$			

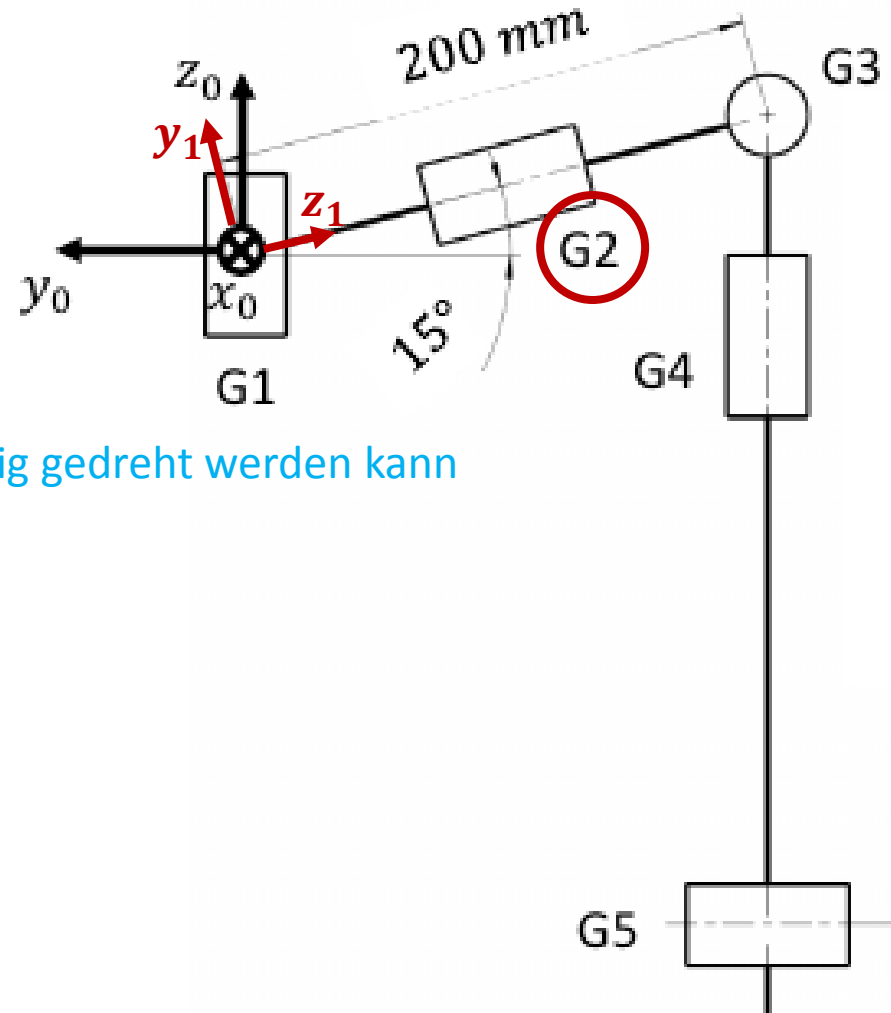
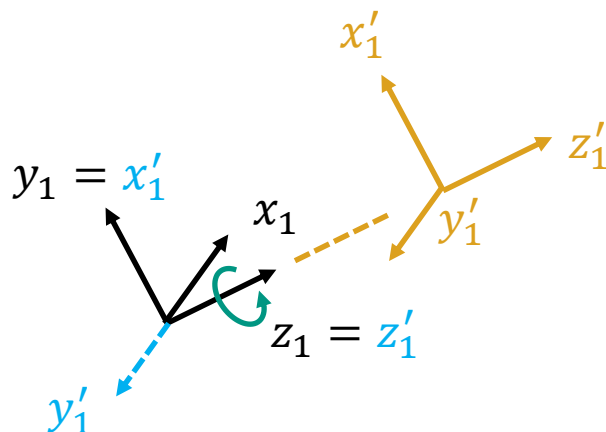
- z_1 -Achse ist Rotationsachse von G2
Aber: Offset von 90° , damit später z_2 richtig gedreht werden kann



Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G2	$\theta_2 + 90$	200	0	

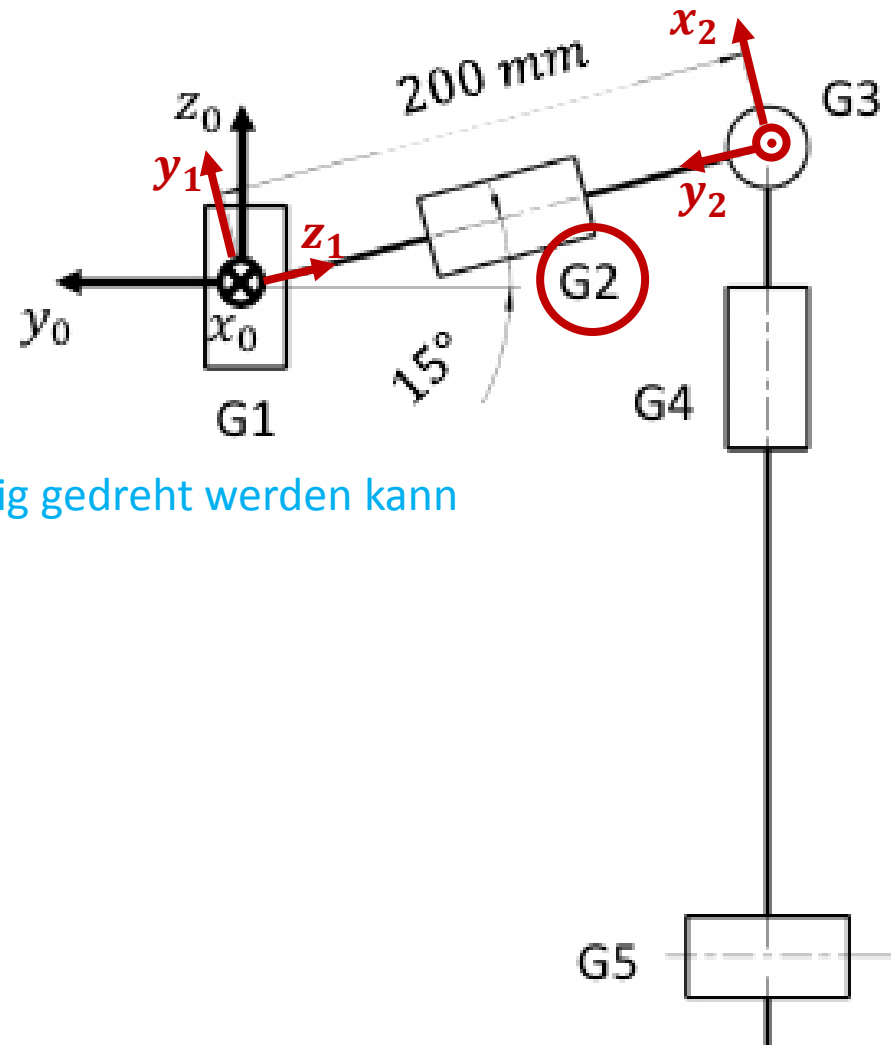
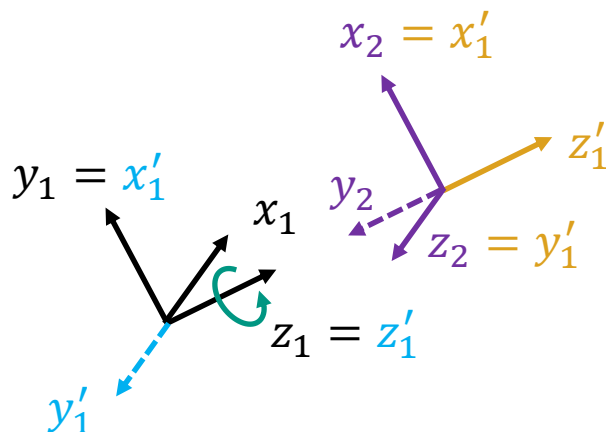
- z_1 -Achse ist Rotationsachse von G2
Aber: Offset von 90°, damit später z_2 richtig gedreht werden kann
- Translation entlang der z_1 -Achse



Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

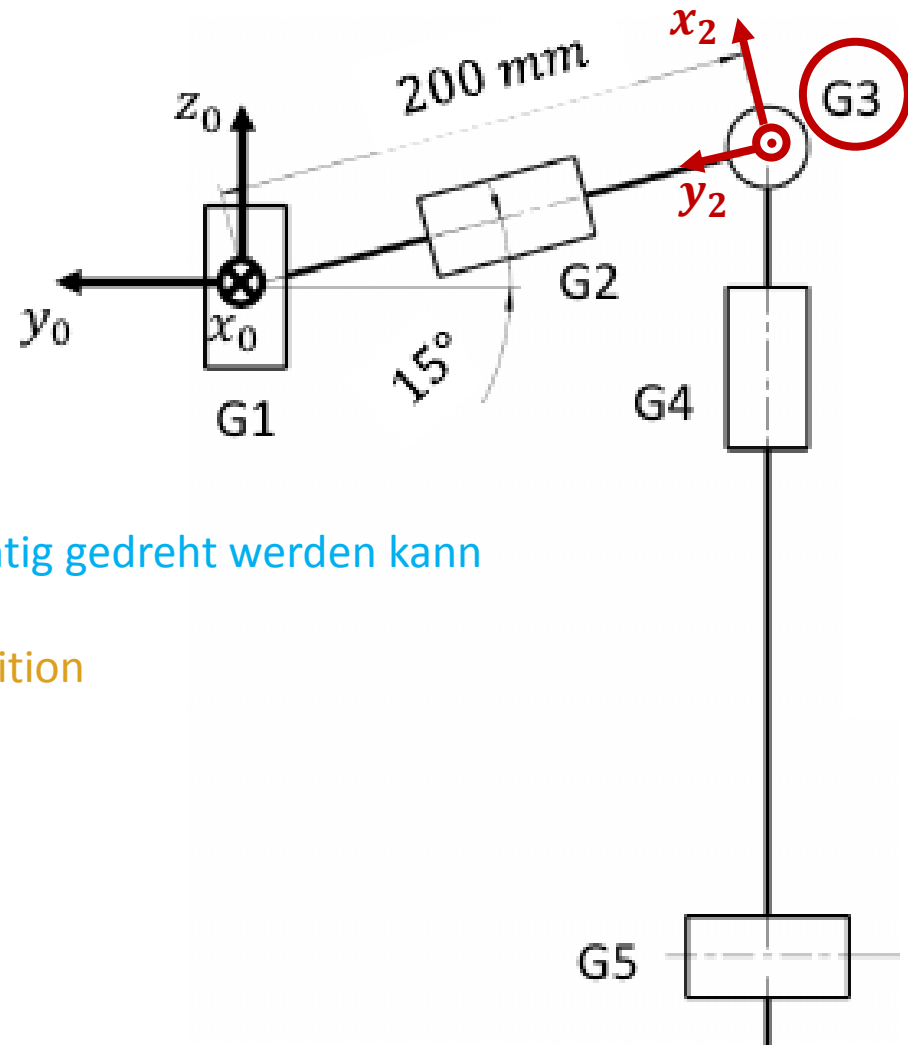
	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G2	$\theta_2 + 90$	200	0	-90

- z_1 -Achse ist Rotationsachse von G2
Aber: Offset von 90°, damit später z_2 richtig gedreht werden kann
- Translation entlang der z_1 -Achse
- Rotation um x_1 -Achse



Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

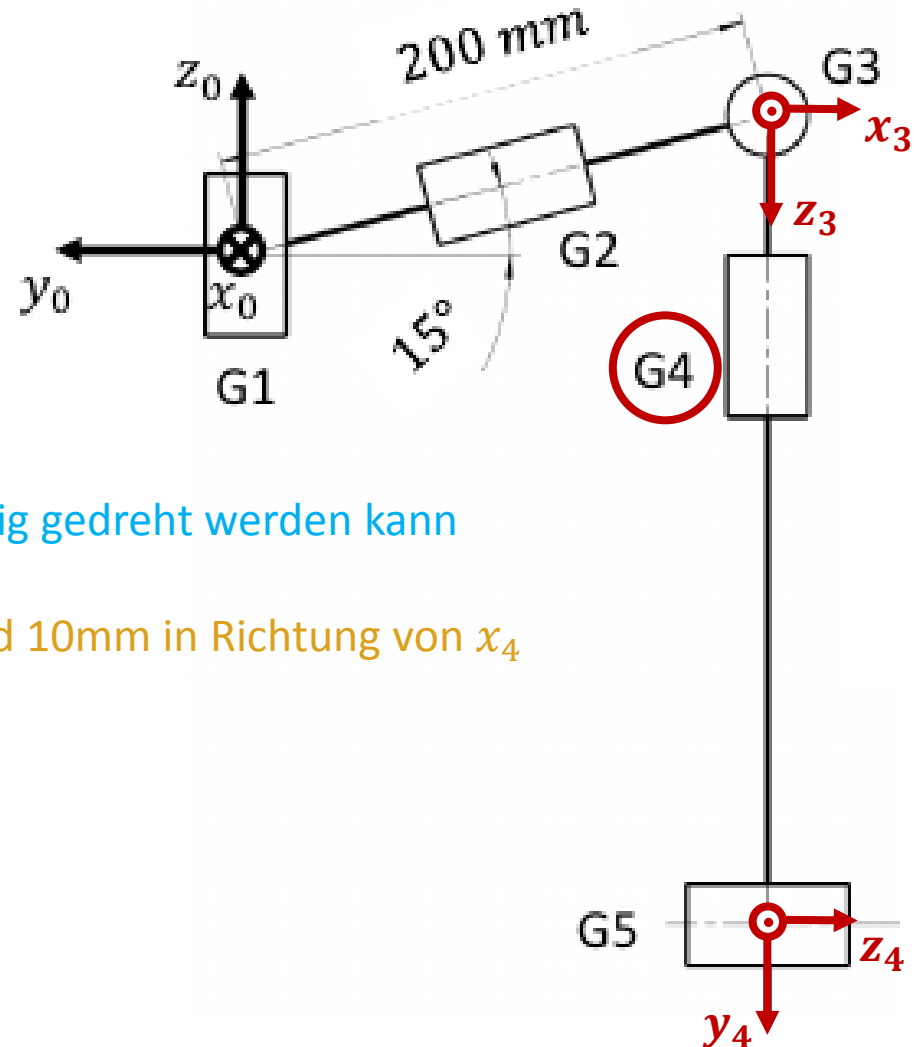
	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G3	$\theta_3 - 105$	0	0	90



- z_2 -Achse ist Rotationsachse von G3
Aber: Offset von 105° , damit später z_3 richtig gedreht werden kann
- G3 und G4 befinden sich an derselben Position
- Rotation um x_2 -Achse

Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

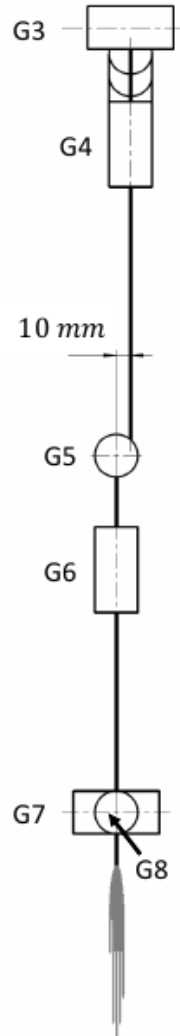
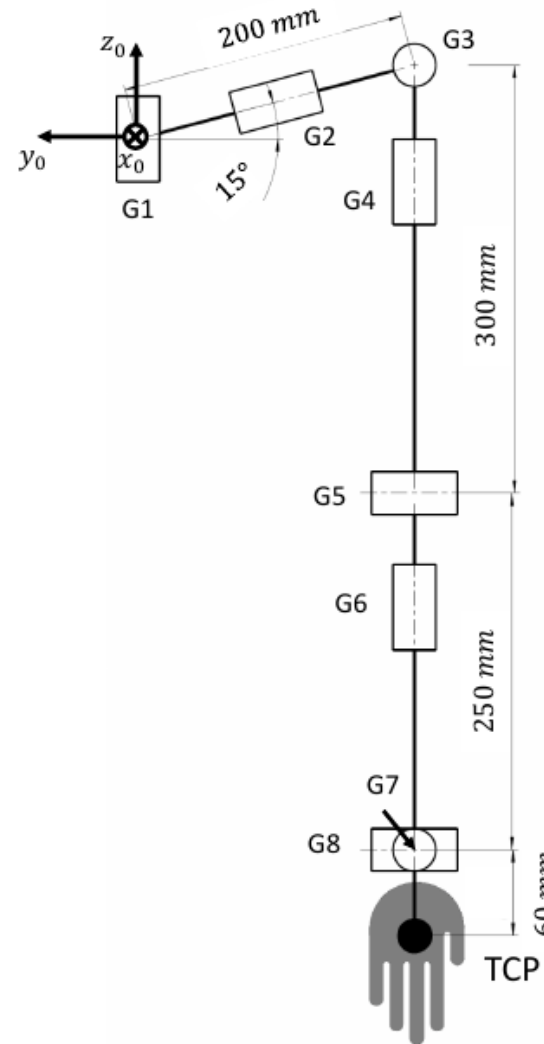
	θ [°]	d [mm]	a [mm]	α [°]
G4	$\theta_4 + 90$	300	10	90



- z_3 -Achse ist Rotationsachse von G4
Aber: Offset von 90° , damit später z_4 richtig gedreht werden kann
- Versatz von 300 mm in Richtung von z_3 und 10 mm in Richtung von x_4
- Rotation um x_4 -Achse

Aufgabe 2: DH-Parameter ARMAR-4

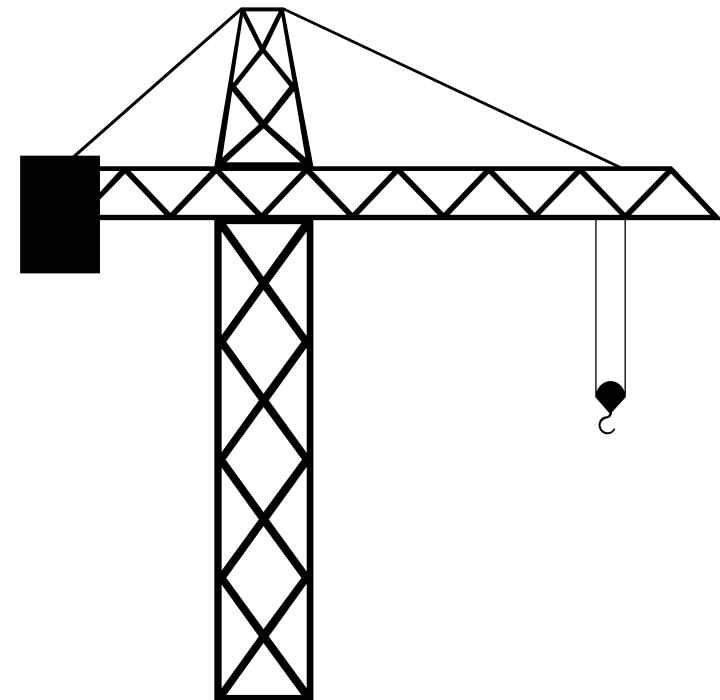
	$\theta [^\circ]$	$d [mm]$	$a [mm]$	$\alpha [^\circ]$
G1	θ_1	0	0	75
G2	$\theta_2 + 90$	200	0	-90
G3	$\theta_3 - 105$	0	0	90
G4	$\theta_4 + 90$	300	10	90
G5	θ_5	0	0	-90
G6	$\theta_6 - 90$	250	0	-90
G7	$\theta_7 - 90$	0	0	-90
G8	θ_8	0	60	0



Aufgabe 3: Turmdrehkran

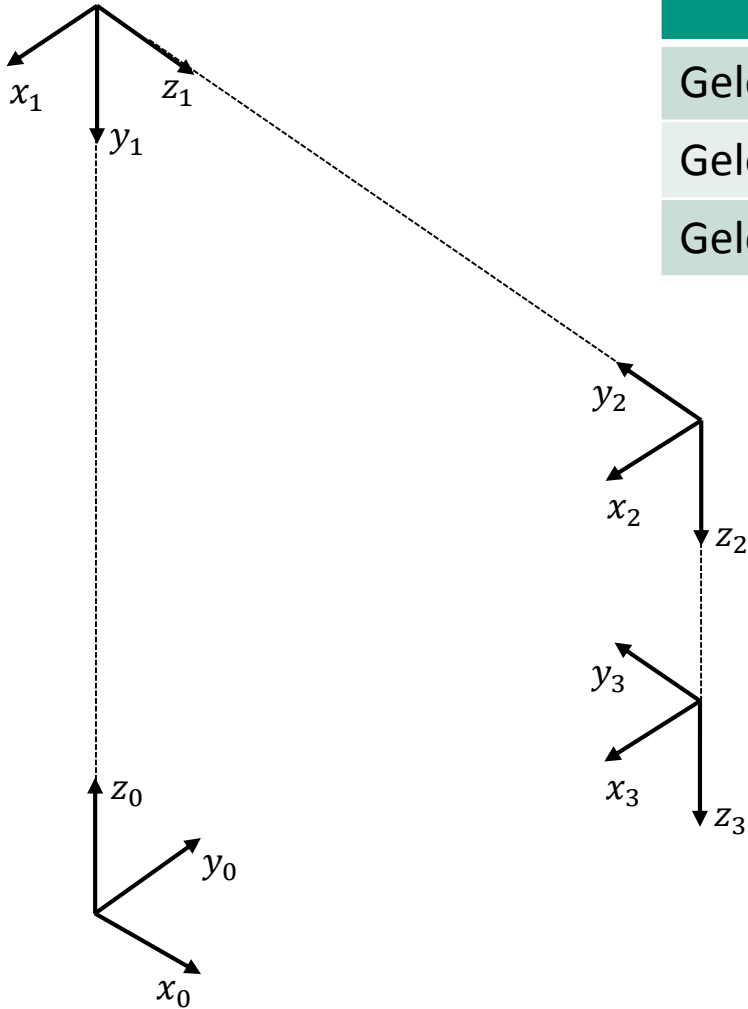
Der Turmdrehkran kann um 360° rotieren und ist 20 m hoch. Der Ausleger ist 15 m lang, wobei die Laufkatze 2 m vor der Rotationsachse stoppt. Der Kranhaken kann bis auf den Boden gesenkt werden.

1. Bestimmen Sie die DH-Parameter des Krans und die daraus resultierende Transformationsmatrix des Endeffektors.
2. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix des Endeffektors.
3. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors ...



<https://thenounproject.com/term/crane/2225/>
gespiegelt (CC Attribution 3.0)

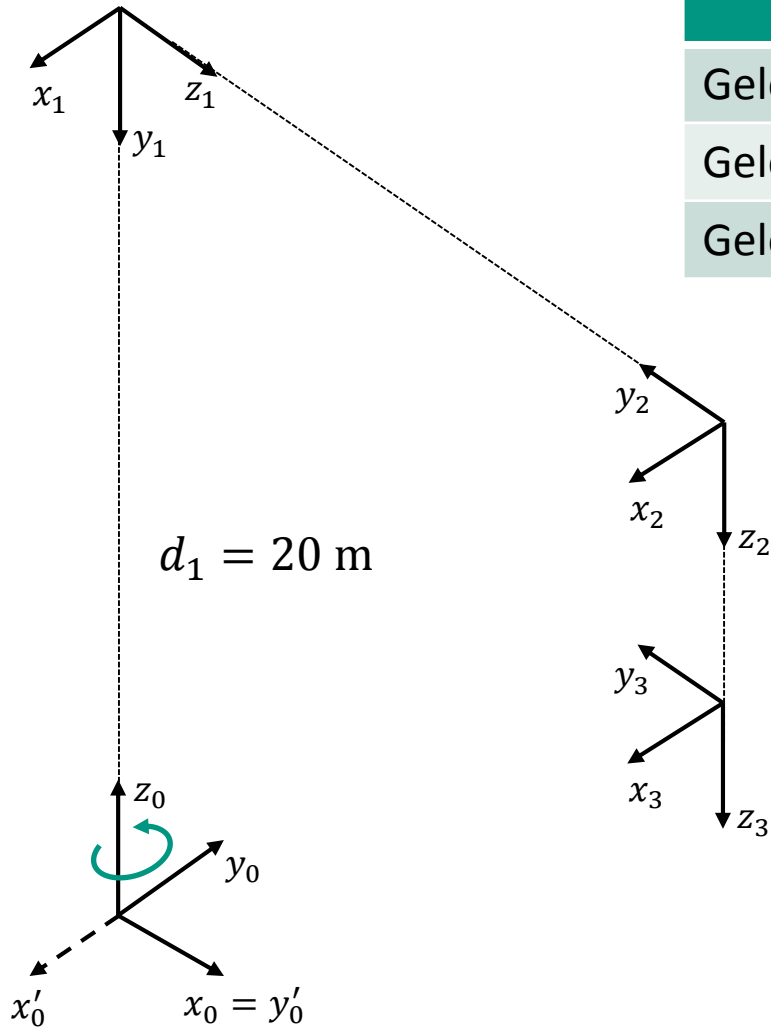
Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans



	θ	d	a	α
Gelenk 1				
Gelenk 2				
Gelenk 3				

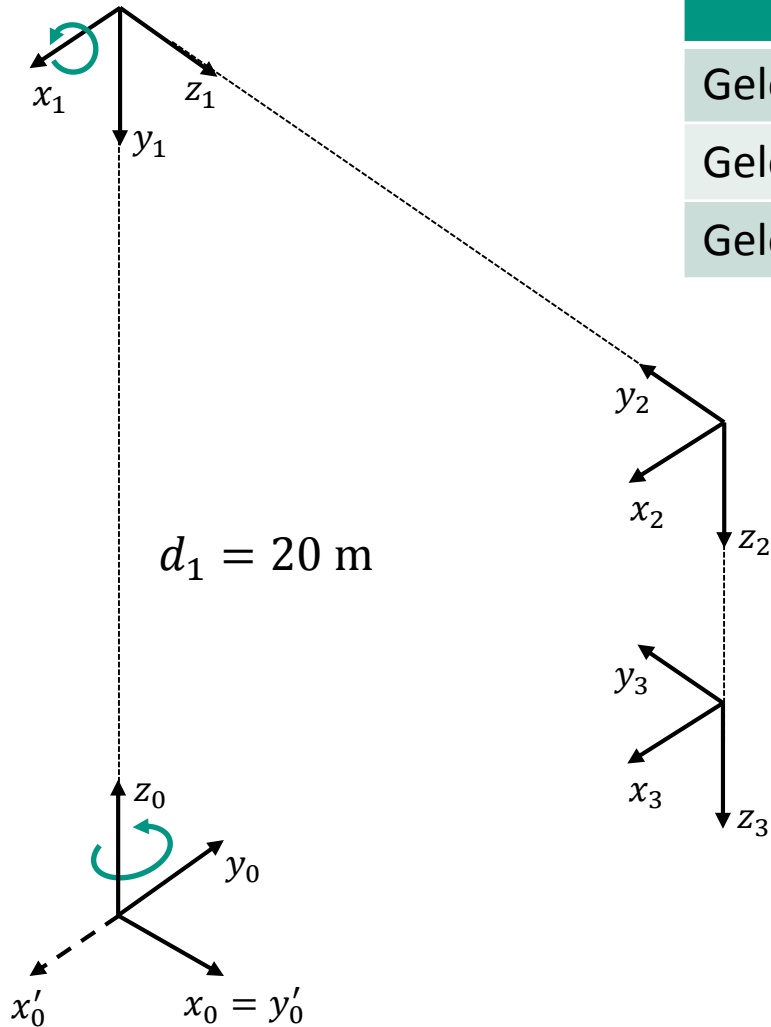
Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90^\circ$	20 m		
Gelenk 2				
Gelenk 3				

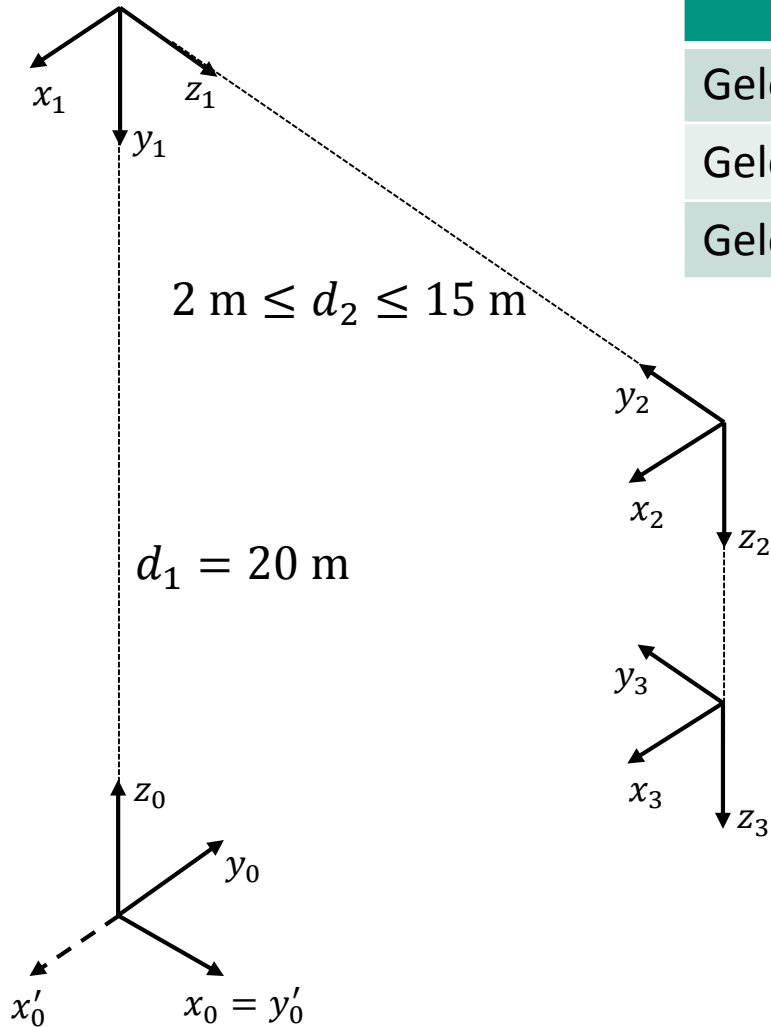


Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90^\circ$	20 m	0 m	-90°
Gelenk 2				
Gelenk 3				

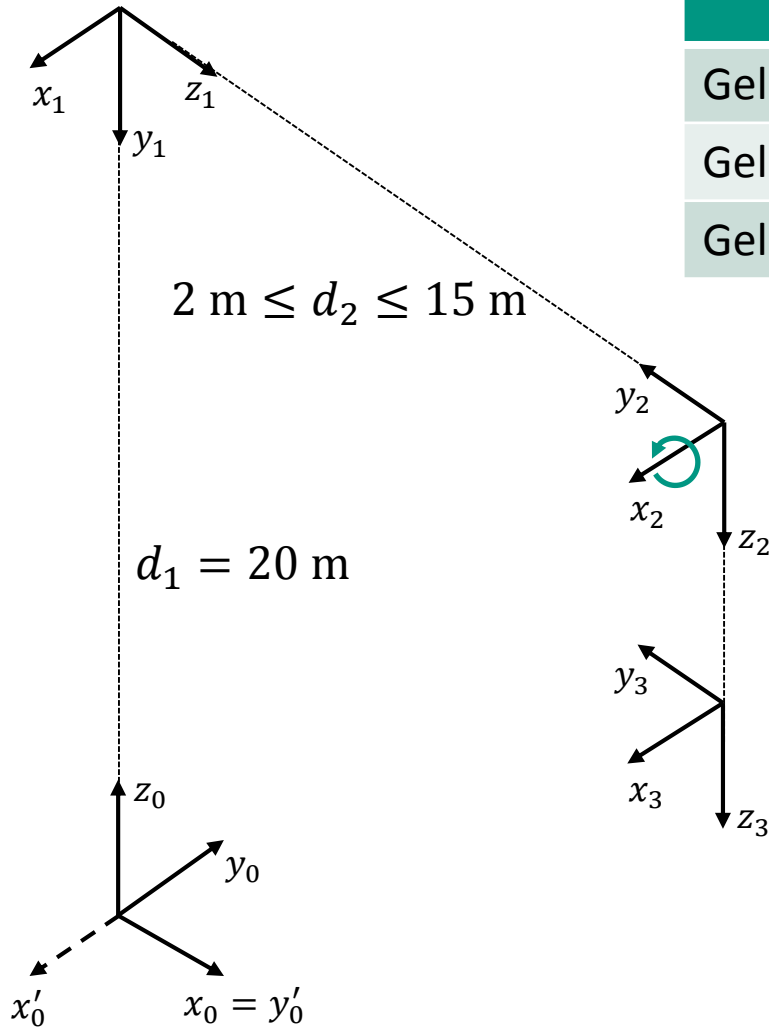


Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans



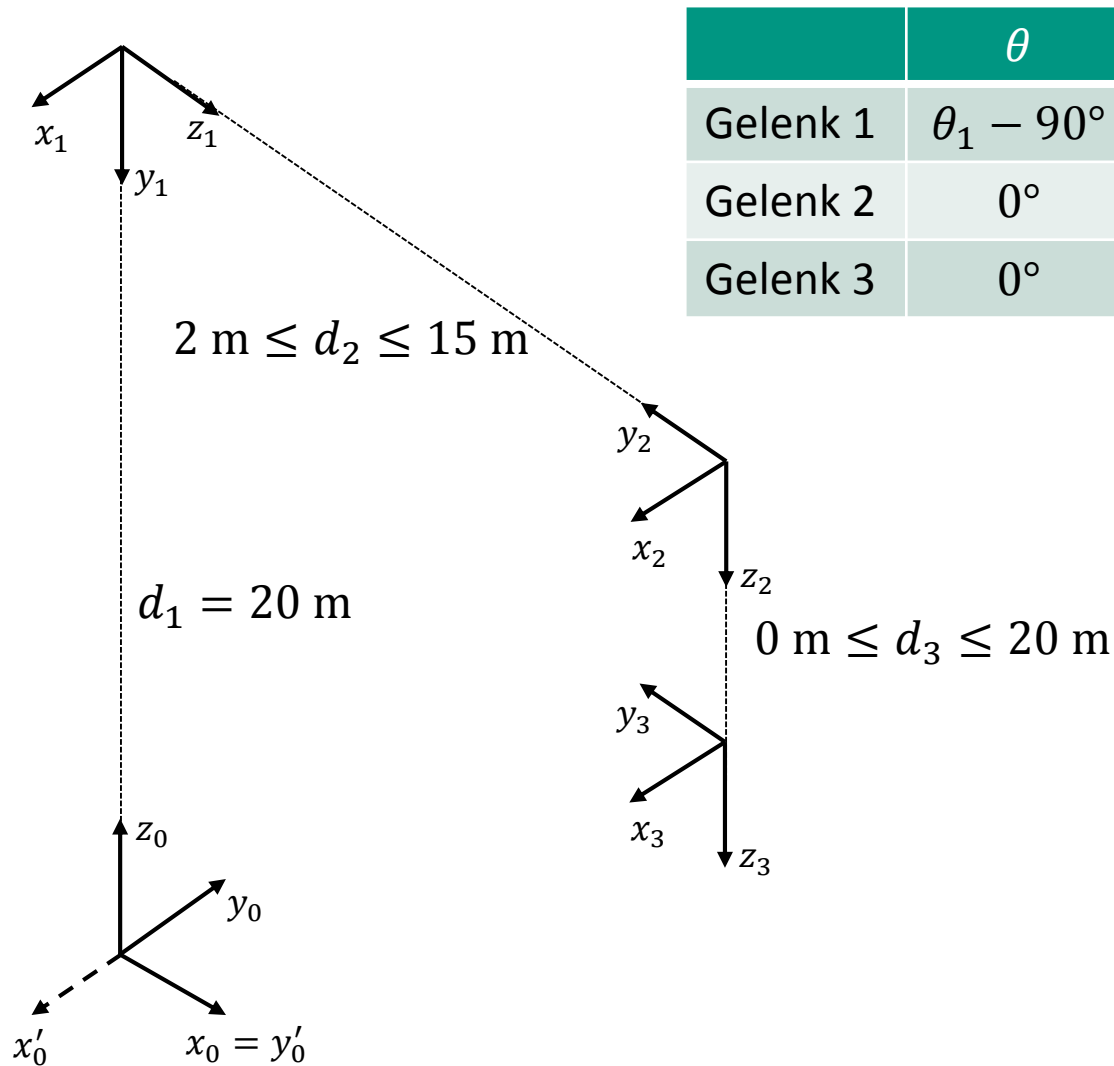
	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90^\circ$	20 m	0 m	-90°
Gelenk 2	0°	$2 \text{ m} \leq d_2 \leq 15 \text{ m}$		
Gelenk 3				

Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans



	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90^\circ$	20 m	0 m	-90°
Gelenk 2	0°	$2 \text{ m} \leq d_2 \leq 15 \text{ m}$	0 m	-90°
Gelenk 3				

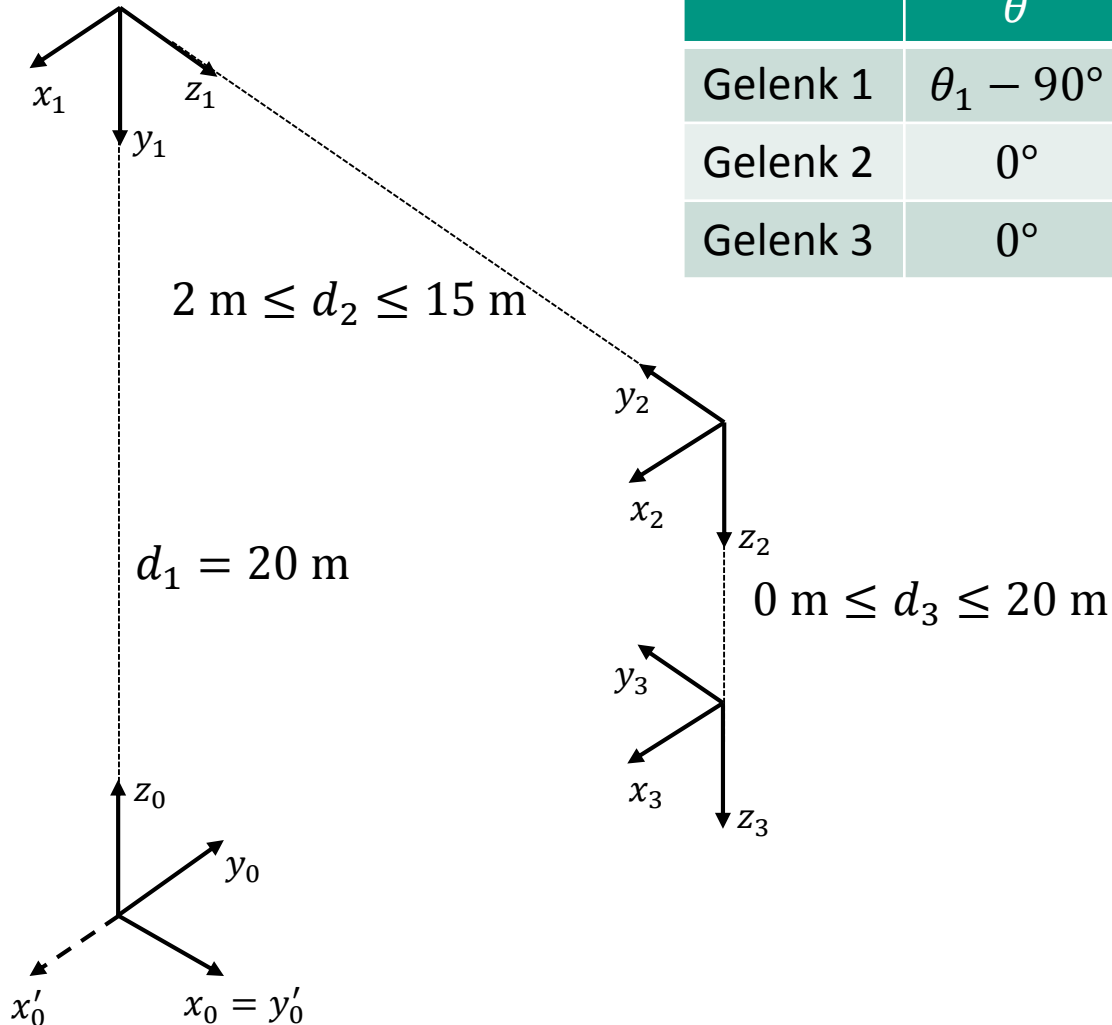
Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans



	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90^\circ$	20 m	0 m	-90°
Gelenk 2	0°	$2 \text{ m} \leq d_2 \leq 15 \text{ m}$	0 m	-90°
Gelenk 3	0°	$0 \text{ m} \leq d_3 \leq 20 \text{ m}$		

Aufgabe 3.1: DH-Parameter des Krans

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90^\circ$	20 m	0 m	-90°
Gelenk 2	0°	$2 \text{ m} \leq d_2 \leq 15 \text{ m}$	0 m	-90°
Gelenk 3	0°	$0 \text{ m} \leq d_3 \leq 20 \text{ m}$	0 m	0°



Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90^\circ$	20 m	0 m	-90°
Gelenk 2	0°	$2 \text{ m} \leq d_2 \leq 15 \text{ m}$	0 m	-90°
Gelenk 3	0°	$0 \text{ m} \leq d_3 \leq 20 \text{ m}$	0 m	0°

DH-Transformationsmatrizen III

Transformation OKS_{i-1} zu OKS_i

$$\begin{aligned}
 A_{i-1,i} &= R_{z_{i-1}}(\theta_i) \cdot T_{z_{i-1}}(d_i) \cdot T_{x_i}(a_i) \cdot R_{x_i}(\alpha_i) = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cdot \cos \alpha_i & \sin \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cdot \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \cdot \sin \alpha_i & a_i \cdot \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90^\circ$	20 m	0 m	-90°
Gelenk 2	0°	$2 \text{ m} \leq d_2 \leq 15 \text{ m}$	0 m	-90°
Gelenk 3	0°	$0 \text{ m} \leq d_3 \leq 20 \text{ m}$	0 m	0°

$$T_{0,1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 1 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90^\circ$	20 m	0 m	-90°
Gelenk 2	0°	$2 \text{ m} \leq d_2 \leq 15 \text{ m}$	0 m	-90°
Gelenk 3	0°	$0 \text{ m} \leq d_3 \leq 20 \text{ m}$	0 m	0°

$$T_{0,1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 1 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

	θ	d	a	α
Gelenk 1	$\theta_1 - 90^\circ$	20 m	0 m	-90°
Gelenk 2	0°	$2 \text{ m} \leq d_2 \leq 15 \text{ m}$	0 m	-90°
Gelenk 3	0°	$0 \text{ m} \leq d_3 \leq 20 \text{ m}$	0 m	0°

$$T_{0,1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 1 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

$$T_{0,3} = T_{0,1} \cdot T_{1,2} \cdot T_{2,3}$$

Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

$$T_{0,3} = T_{0,1} \cdot T_{1,2} \cdot T_{2,3}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & -\cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T_{2,3}$$

Aufgabe 3.1: Transformationsmatrix des Krans

$$T_{0,3} = T_{0,1} \cdot T_{1,2} \cdot T_{2,3}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & -\cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T_{2,3}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & -\cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & -\cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix J .

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & -\cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix J .

- Jede Spalte der Jacobi-Matrix korrespondiert zu einem Gelenk θ_i der kinematischen Kette

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f}{\partial d_2} & \frac{\partial f}{\partial d_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & -\cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & -\cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$y = \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$z = -d_3 + 20$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & -\cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ \textcolor{green}{0} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$y = \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$z = -d_3 + 20$$

$$\beta = \text{asin}(-\textcolor{green}{n}_z) = \text{asin}(0) = 0$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & -\cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ 0 & \textcolor{red}{0} & \textcolor{blue}{-1} & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$y = \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$z = -d_3 + 20$$

$$\beta = \text{asin}(-\textcolor{teal}{n}_z) = \text{asin}(0) = 0$$

$$\cos \beta \sin \alpha = \textcolor{red}{0}, \quad \cos \beta \cos \alpha = \textcolor{blue}{-1} \Rightarrow \alpha = \pi$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & -\cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$y = \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$z = -d_3 + 20$$

$$\beta = \text{asin}(-n_z) = \text{asin}(0) = 0$$

$$\cos \beta \sin \alpha = 0, \quad \cos \beta \cos \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi$$

$$\gamma = \text{atan}\left(\frac{n_y}{n_x}\right) = \text{atan}\left(\frac{\sin(\theta_1 - 90^\circ)}{\cos(\theta_1 - 90^\circ)}\right)$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$T_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - 90^\circ) & \sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ \sin(\theta_1 - 90^\circ) & -\cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 + 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$y = \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$z = -d_3 + 20$$

$$\beta = \text{asin}(-n_z) = \text{asin}(0) = 0$$

$$\cos \beta \sin \alpha = 0, \quad \cos \beta \cos \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi$$

$$\gamma = \text{atan}\left(\frac{n_y}{n_x}\right) = \text{atan}\left(\frac{\sin(\theta_1 - 90^\circ)}{\cos(\theta_1 - 90^\circ)}\right) = \text{atan}(\tan(\theta_1 - 90^\circ)) = \theta_1 - 90^\circ$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$x = -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$y = \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$z = -d_3 + 20$$

$$\alpha = \pi$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = \theta_1 - 90^\circ$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f}{\partial d_2} & \frac{\partial f}{\partial d_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$f(\theta_1, d_2, d_3) = (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$$

$$x = -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$y = \cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$z = -d_3 + 20$$

$$\alpha = \pi$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = \theta_1 - 90^\circ$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f}{\partial d_2} & \frac{\partial f}{\partial d_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta_1}, \frac{\partial y}{\partial \theta_1}, \frac{\partial z}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \beta}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_1} \right)^T$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(x) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(-\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(y) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(\cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(z) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(-d_3 + 20)$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(x) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(-\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(x) = -\cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(y) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(\cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(y) = -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(z) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(-d_3 + 20) = 0$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(\pi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(\beta) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(0)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(\gamma) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(\theta_1 - 90^\circ)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1} =$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(\pi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(\beta) = \frac{\partial}{\partial \theta_1}(0) = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta_1}(\gamma) &= \frac{\partial}{\partial \theta_1}(\theta_1 - 90^\circ) \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1} = (-\cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2, -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2, 0, 0, 0, 1)^T$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(x) = \frac{\partial}{\partial d_2}(-\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(y) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(z) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\beta) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\gamma)$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(x) = \frac{\partial}{\partial d_2}(-\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(x) = -\sin(\theta_1 - 90^\circ)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(y) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(y) = \cos(\theta_1 - 90^\circ)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_2}(z) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\beta) = \frac{\partial}{\partial d_2}(\gamma) = 0$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial d_3}(z) = \frac{\partial}{\partial d_3}(-d_3 + 20)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_3}(x) = \frac{\partial}{\partial d_3}(y) = \frac{\partial}{\partial d_3}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial d_3}(\beta) = \frac{\partial}{\partial d_3}(\gamma)$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$\frac{\partial}{\partial d_3}(z) = \frac{\partial}{\partial d_3}(-d_3 + 20)$$

$$\frac{\partial}{\partial d_3}(z) = -1$$

$$\frac{\partial}{\partial d_3}(x) = \frac{\partial}{\partial d_3}(y) = \frac{\partial}{\partial d_3}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial d_3}(\beta) = \frac{\partial}{\partial d_3}(\gamma) = 0$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f}{\partial d_2} & \frac{\partial f}{\partial d_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

Aufgabe 3.2: Jacobi-Matrix des Endeffektors

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f}{\partial d_2} & \frac{\partial f}{\partial d_3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

$$J = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1 - 90^\circ) d_2 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ -\sin(\theta_1 - 90^\circ) d_2 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,1)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_1 = (90, 10, 10)^T, \mathbf{p}_1 = (1, 1, 1)^T$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,1)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_1 = (90, 10, 10)^T, \mathbf{p}_1 = (1, 1, 1)^T$$

$$\mathbf{v}_1 = J(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{p}_1$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,1)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_1 = (\textcolor{red}{90}, \textcolor{blue}{10}, 10)^T, \mathbf{p}_1 = (1, 1, 1)^T$$

$$\mathbf{v}_1 = J(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{p}_1$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\cos(\textcolor{red}{\theta}_1 - 90^\circ) \cdot \textcolor{blue}{d}_2 & -\sin(\textcolor{red}{\theta}_1 - 90^\circ) & 0 \\ -\sin(\textcolor{red}{\theta}_1 - 90^\circ) \cdot \textcolor{blue}{d}_2 & \cos(\textcolor{red}{\theta}_1 - 90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,1)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_1 = (90, 10, 10)^T, \mathbf{p}_1 = (1, 1, 1)^T$$

$$\mathbf{v}_1 = J(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{p}_1$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\cos(90^\circ - 90^\circ) \cdot 10 & -\sin(90^\circ - 90^\circ) & 0 \\ -\sin(90^\circ - 90^\circ) \cdot 10 & \cos(90^\circ - 90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,1)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_1 = (\textcolor{red}{90}, \textcolor{blue}{10}, 10)^T, \mathbf{p}_1 = (1, 1, 1)^T$$

$$\mathbf{v}_1 = J(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{p}_1$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,1)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_1 = (\textcolor{red}{90}, \textcolor{blue}{10}, 10)^T, \mathbf{p}_1 = (1, 1, 1)^T$$

$$\mathbf{v}_1 = J(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{p}_1$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_1 = (90, 10, 10)^T, \mathbf{p}_2 = (-1, -1, 0)^T$$

$$\mathbf{v}_2 = J(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{p}_2$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_1 = (90, 10, 10)^T, \mathbf{p}_2 = (-1, -1, 0)^T$$

$$\mathbf{v}_2 = J(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (1,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_1 = (90, 10, 10)^T, \mathbf{p}_2 = (-1, -1, 0)^T$$

$$\mathbf{v}_2 = J(\mathbf{q}_1) \cdot \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_2 = (180, 2, 15)^T, \mathbf{p}_2 = (-1, -1, 0)$$

$$\mathbf{v}_3 = J(\mathbf{q}_2) \cdot \mathbf{p}_2$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_2 = (180, 2, 15)^T, \mathbf{p}_2 = (-1, -1, 0)$$

$$\mathbf{v}_3 = J(\mathbf{q}_2) \cdot \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1 - 90^\circ) \cdot d_2 & -\sin(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ -\sin(\theta_1 - 90^\circ) \cdot d_2 & \cos(\theta_1 - 90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_2 = (\textcolor{red}{180}, \textcolor{blue}{2}, 15)^T, \mathbf{p}_2 = (-1, -1, 0)$$

$$\mathbf{v}_3 = J(\mathbf{q}_2) \cdot \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -\cos(\textcolor{red}{180}^\circ - 90^\circ) \cdot \textcolor{blue}{2} & -\sin(\textcolor{red}{180}^\circ - 90^\circ) & 0 \\ -\sin(\textcolor{red}{180}^\circ - 90^\circ) \cdot \textcolor{blue}{2} & \cos(\textcolor{red}{180}^\circ - 90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_2 = (\textcolor{red}{180}, \textcolor{blue}{2}, 15)^T, \mathbf{p}_2 = (-1, -1, 0)$$

$$\mathbf{v}_3 = J(\mathbf{q}_2) \cdot \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,2)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_2 = (\textcolor{red}{180}, \textcolor{blue}{2}, 15)^T, \mathbf{p}_2 = (-1, -1, 0)$$

$$\mathbf{v}_3 = J(\mathbf{q}_2) \cdot \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,3)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_2 = (180, 2, 15)^T, \mathbf{p}_3 = (2, -1, 2)$$

$$\mathbf{v}_4 = J(\mathbf{q}_2) \cdot \mathbf{p}_3$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,3)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_2 = (180, 2, 15)^T, \mathbf{p}_3 = (2, -1, 2)$$

$$\mathbf{v}_4 = J(\mathbf{q}_2) \cdot \mathbf{p}_3$$

$$\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.3: Geschwindigkeit des Endeffektors (2,3)

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Endeffektors für die Konfiguration $\mathbf{q}$ und die Gelenkwinkelgeschwindigkeit $\mathbf{p}$.

$$\mathbf{q}_2 = (180, 2, 15)^T, \mathbf{p}_3 = (2, -1, 2)$$

$$\mathbf{v}_4 = J(\mathbf{q}_2) \cdot \mathbf{p}_3$$

$$\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$